Control óptimo y aplicaciones

Constanza Sánchez de la Vega

Escuela Monteiro

Junio de 2023

En este curso consideraremos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= x^0 \end{aligned}$$

donde dada una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y un dato inicial x^0, la incógnita es la función $x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ que llamaremos estado del sistema.

Ejemplo
Supongamos que tenemos una fábrica que tiene como ganancia una cantidad $x(t)$ que depende del tiempo. Asumamos que la ganancia inicial fue x^0, la tasa de rendimiento de la reinversión es $k = 2$ y que reinvertimos toda la ganancia en todo momento. Entonces la ganancia viene dada por la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= kx(t) = 2x(t) \\ x(0) &= x^0 \end{aligned}$$

cuya solución sabemos que es $x(t) = x^0 e^{2t}$.

Si ahora asumimos que f depende de un parámetro $a \in A \subseteq \mathbb{R}^m$ que controla el sistema de manera que $f : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(a, x(t))$$
$$x(0) = x^0$$

obtenemos que el estado del sistema $x[a]$ depende a.

Ejemplo

Ahora reinvertimos sólo una proporción $a \in [0, 1]$ de la ganancia

$$\dot{x}(t) = kax(t) = 2ax(t), \quad x(0) = x^0$$

cuya solución es $x[a](t) = x^0 e^{2at}$. Además el consumo (lo que no invertimos) en un intervalo de tiempo $[0, T]$ es

$$\int_0^T x(t) - ax(t)dt = \int_0^T (1-a)x(t)dt = (1-a)x^0 \frac{e^{2aT} - 1}{2a}.$$

Cuánto me conviene invertir si queremos obtener el mayor consumo acumulado en $[0, T]$?

Ejercicio. Probar que si $T \leq 1$ conviene tomar $a^* = 0$ y si $T > 1$ conviene a^* única solución de $(1-a)2aT = 1 - e^{-2aT}$.

Qué pasa si ahora permito ir cambiando la tasa de reinversión a lo largo del tiempo. Por ejemplo si quiero tomar una tasa de reinversión como

$$\alpha(t) = \begin{cases} a_1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ a_2 & t_1 < t \leq t_2 \\ a_3 & t_2 < t \leq T \end{cases}$$

con $a_1, a_2, a_3 \in A = [0, 1]$. Entonces tendremos que resolver el sistema

$$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t) \tag{1a}$$

$$x(0) = x^0 \tag{1b}$$

que podemos resolver si a priori sabemos en dónde y cuántas veces está partida la función α.

Más en general vemos que una función $\alpha : [0, T] \to [0, 1]$ **controla** el sistema. Es decir, para cada $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y cada α tendremos una diferente respuesta o **estado** del sistema, que es la solución de la ode (1) que notamos $x[x^0, \alpha] : [0, T] \to \mathbb{R}^n$. Cuando x^0 está fijo usamos la notación $x[\alpha]$.

Ejemplo

Seguimos con el ejemplo de la ganancia en la fábrica con tasa de rendimiento de reinversión $k = 2$ pero ahora en cada tiempo t reinvertimos una proporción $\alpha(t) \in [0, 1]$ de la ganancia

$$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t) = 2\alpha(t)x(t), \quad x(0) = x^0$$

cuya solución sabemos que es $x[\alpha](t) = x^0 e^{\int_0^t 2\alpha(s)ds}$. Además en este caso el consumo en un intervalo de tiempo $[0, T]$ es

$$\int_0^T x(t) - \alpha(t)x(t)dt = \int_0^T (1 - \alpha(t))x(t)dt.$$

Cuánto me conviene reinvertir en cada momento si queremos obtener el mayor consumo acumulado en $[0, T]$?
Es decir el problema completo consiste en

$$\begin{aligned} &\max_{\alpha} \int_0^T (1 - \alpha(t))x(t)dt \\ &\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t) \\ &x(0) = x^0 \\ &\alpha(t) \in [0, 1] \end{aligned}$$

Para este problemas con control óptimo

$$\max_{\alpha} \int_0^T (1 - \alpha(t))x(t)dt \tag{2a}$$

$$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t) \tag{2b}$$

$$x(0) = x^0 \tag{2c}$$

$$\alpha(t) \in [0, 1] \tag{2d}$$

Algunas preguntas:

- ¿La ecuación diferencial tiene solución para cada α? ¿Cómo deben ser los controles α para que haya un óptimo? ¿Que regularidad tiene la solución?
- ¿Existe una solución ópitma (control óptimo)?
- ¿Podemos caracterizar matemáticamente a un control óptimo?

Usaremos

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(t) \end{pmatrix}, \qquad f(t,x,\alpha) = \begin{pmatrix} f_1(t,x,\alpha) \\ \vdots \\ f_n(t,x,\alpha) \end{pmatrix}$$

con $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^m, f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
Además, llamaremos al conjunto de **controles admisibles** a

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0,T] \to A : \alpha \text{ es medible}\}.$$

La **ecuación de estado** vendrá dada por la ecuación diferencial ordinaria a valores iniciales

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t))$$
$$x(0) = x^0$$

en donde consideraremos soluciones $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente continuas.

Bajo ciertas hipótesis sobre f y achicando el espacio de controles admisibles, se puede probar que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe una única solución $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua. En este caso usaremos la notación $x[\alpha]$. Ver [5] (Capítulo 11) y [4] (Anexo C).

Para simplificar, en lo que sigue consideraremos **controles** $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ **continuos a trozos** que están definidas como aquellas funciones que son continuas en $[0, T]$ salvo a lo sumo en finitos puntos $t_i \in (0, T)$ con $i = 1, \cdots, n$ de manera que existen los límites por derecha e izquierda de α en cada t_i. Es decir, consideraremos

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, T] \to A : \alpha \text{ continuas a trozos } \}\,.$$

Para estos controles se puede probar que siempre existe un único estado definido en $[0, T]$.

Teorema

Dada f continua a trozos con respecto a la variable t, continua con respecto a la variable α y globalmente Lipschitz con respecto a la variable x, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, existe una única función de estado $x[\alpha]$ definida en $[0, T]$ que es continua en $[0, T]$ y diferenciable a trozos.

Queremos hallar el "mejor" control para nuestro sistema. Definimos el funcional de costo

$$J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T))$$

donde $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
El problema de control óptimo general tiene la forma:

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T)) \\
&\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t)) \\
&x(0) = x^0 \\
&\alpha(t) \in A \subset \mathbb{R}^m \\
&x(T) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

donde $T > 0$ es dado y asumimos ψ, f, L son de clase C^1 con respecto a x. Notar que si f_x está acotada por una función integrable en t, estaremos en las hipótesis del teorema de existencia.

- $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$: el estado final es libre.
- $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n_+$: condiciones de desigualdad en el estado final como $x_i(T) \geq 0$.
- A se suele tomar compacto de $\mathbb{R}^m$. Ej anterior $m = 1$ y $A = [0, 1]$.

Consideramos el problema de optimización

$$\max_{a\in\mathbb{R}^m} F(x)$$
$$G(x) = 0$$

donde $F, G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ son diferenciables.

El Teorema de multiplicadores de Lagrange dice que:

Si a^* es un óptimo y $\nabla G(a^*) \neq \vec{0}$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\nabla F(a^*) + \lambda \nabla G(a^*) = \vec{0}.$$

Si llamamos

$$\mathcal{L}(\lambda, x) = F(x) + \lambda G(x)$$

podemos enunciar las condiciones de Lagrange como:

$$\begin{array}{lcl} \nabla_x \mathcal{L}(\lambda, a^*) = \vec{0} & \to & \nabla F(a^*) + \lambda \nabla G(a^*) = \vec{0} \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(\lambda, a^*) = 0 & \to & G(a^*) = 0 \end{array}$$

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T)) \quad \text{(3a)}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t)) \quad \text{(3b)}$$

$$x(0) = x^0 \quad \text{(3c)}$$

donde

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0,T] \to \mathbb{R} : \alpha \text{ es continua a trozos } \}.$$

Supongamos que α^* es un control óptimo, es decir, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$J(\alpha^*) \geq J(\alpha).$$

Dado $\varepsilon > 0$ y $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ continua , definimos

$$\alpha^\varepsilon = \alpha^* + \varepsilon h$$

de manera que $\alpha^\varepsilon \in \mathcal{A}$ y $\alpha^\varepsilon - \alpha^* = \varepsilon h$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ se tendrá x^ε solución de (3b)-(3c) con $\alpha = \alpha^\varepsilon$ y

$$J(\alpha^*) \geq J(\alpha^\varepsilon)$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Llamamos $x^* = x[\alpha^*]$ y $f^*(t) = f(t, x^*(t), \alpha^*(t))$ entonces

$$\begin{aligned}\dot{x^\varepsilon}(t) - \dot{x^*}(t) &= f(t, x^\varepsilon(t), \alpha^\varepsilon(t)) - f(t, x^*(t), \alpha^*(t)) \\ &= \nabla_x f^*(t)(x^\varepsilon - x^*)(t) + \nabla_\alpha f^*(t)\varepsilon h(t) + o(\varepsilon)\\ x^\varepsilon(0) - x^*(0) = 0\end{aligned}$$

de donde deducimos que $y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{x^\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon}$ satisface la ecuación diferencial lineal

$$\dot{y}(t) = \nabla_x f^*(t) y(t) + \nabla_\alpha f^*(t) h(t) \tag{4a}$$

$$y(0) = 0 \tag{4b}$$

Si definimos $\tilde{J}(\varepsilon) = J(\alpha^\varepsilon)$ vemos que $\tilde{J} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo en $\varepsilon = 0$ de donde tenemos que $\tilde{J}'(0^+) \leq 0$. Calculamos

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\alpha^\varepsilon)|_{\varepsilon=0^+} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{J(\alpha^\varepsilon) - J(\alpha^*)}{\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned}\frac{J(\alpha^\varepsilon) - J(\alpha^*)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T L(x^\varepsilon(t), \alpha^\varepsilon(t)) - L(x^*(t), \alpha^*(t)) dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(\psi(x^\varepsilon(T)) - \psi(x^*(T)) \right)\end{aligned}$$

Siguiendo la cuenta

$$\frac{d}{d\varepsilon}J(\alpha^{\varepsilon})|_{\varepsilon=0^+} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{J(\alpha^{\varepsilon}) - J(\alpha^*)}{\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned}\frac{J(\alpha^{\varepsilon}) - J(\alpha^*)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T L(x^{\varepsilon}(t), \alpha^{\varepsilon}(t)) - L(x^*(t), \alpha^*(t))dt \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\left(\psi(x^{\varepsilon}(T)) - \psi(x^*(T))\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \nabla_x L^*(t)(x^{\varepsilon} - x^*)(t)dt + \nabla_{\alpha} L^*(t)\varepsilon h(t) + O(\varepsilon) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\nabla_x\psi(x^*(T))(x^{\varepsilon}(T) - x^*(T)) + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

de donde tomando límite, obtenemos que

$$\int_0^T \nabla_x L^*(t)y(t)dt + \nabla_{\alpha} L^*(t)h(t) + \nabla_x\psi(x^*(T))y(T) \leq 0.$$

En lo que sigue queremos reescribir todo en función de h.

Dada una ecuación diferencial lineal

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t)$$

con $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ se llama sistema adjunto a

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$$

cuya solución $p \in \mathbb{R}^{1\times n}$ hace que

$$\dot{(py)} = \dot{p}y + p\dot{y} = -p(t)A(t)y(t) + p(t)A(t)y(t) = 0.$$

En particular para la solución y de

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \nabla_x f^*(t)y(t) + \nabla_\alpha f^*(t)h(t)\\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

definimos el sistema adjunto p que se conoce como coestado:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -p(t)\nabla_x f^*(t) - \nabla_x L^*(t)\\ p(T) &= \nabla\psi(x^*(T))\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{(py)}(t) &= \left(-p(t)\nabla_x f^*(t) - \nabla_x L^*(t)\right)y(t) + p(t)\left(\nabla_x f^*(t)y(t) + \nabla_\alpha f^*(t)h(t)\right)\\ &= -\nabla_x L^*(t)y(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t)h(t),\end{aligned}$$

Integrando en $[0,T]$ la igualdad

$$(\dot{py})(t) = -\nabla_x L^*(t)y(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t)h(t),$$

y usando que $y(0) = 0$ obtenemos

$$p(T)y(T) = \int_0^T -\nabla_x L^*(t)y(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t)h(t),$$

y como $p(T) = \nabla_x \psi(x^*(T))$ nos queda

$$\int_0^T \nabla_x L^*(t)y(t) = \int_0^T p(t)\nabla_\alpha f^*(t)h(t) - \nabla_x \psi(x^*(T))y(T).$$

Si retomamos la desigualdad

$$\int_0^T \nabla_x L^*(t)y(t)dt + \nabla_\alpha L^*(t)h(t) + \nabla_x \psi(x^*(T))y(T) \leq 0$$

vemos que podemos escribir todo en función de h como queríamos:

$$\int_0^T \left(\nabla_\alpha L^*(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t)\right) h(t) \leq 0$$

Teníamos

$$\int_0^T \left(\nabla_\alpha L^*(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t)\right) h(t) \leq 0$$

de donde concluimos que como h era cualquier función continua

$$\nabla_\alpha L^*(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t) = 0$$

en casi todo $t \in [0, T]$.

Al igual que como hicimos en multiplicadores de Lagrange, si definimos

$$H(t, x, \alpha, p) = L(t, x, \alpha) + pf(t, x, \alpha)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*, \alpha^*, p) \\
\dot{x} &= \frac{\partial}{\partial p} H(t, x^*, \alpha^*, p) \\
0 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} H(t, x^*, \alpha^*, p)
\end{aligned}$$

Teorema

Si α^* es un control óptimo del problema

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T))$$
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t))$$
$$x(0) = x^0$$

y $x^* = x[\alpha^*]$, entonces existe $p : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ función continua con derivada continua a trozos tal que si definimos $H(t,x,\alpha,p) = L(t,x,\alpha) + pf(t,x,\alpha)$, se tiene que

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*, \alpha^*, p)$$
$$p(T) = \nabla_x \psi(x(T))$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} H(t, x^*, \alpha^*, p)$$

Consideramos un problema en el que

- $x(t)$: número de células de un tumor,
- a: tasa de crecimiento exponencial de las células
- $\alpha(t)$: tratamiento que aplicaremos continuamente
- $[0, T]$: intervalo de tiempo en el que haremos el tratamiento

Queremos minimizar el número de células del tumor al final del intervalo, con el mínimo costo de tratamiento (menor cantidad de medicación). Planteamos el siguiente modelo:

$$\min_{\alpha \in \mathcal{A}} J(\alpha) = \int_0^T \alpha^2(t)dt + x(T)$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) - \alpha(t)$$

$$x(0) = x^0 > 0$$

donde

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, T] \to \mathbb{R} : \alpha \text{ es continua a trozos } \}.$$

Lo primero que observamos es que encontrar un mínimo de ese problema equivale a encontrar un máximo de $-J(\alpha)$.

Planteamos el problema de control óptimo:

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) := -\int_0^T \alpha^2(t)dt - x(T)$$
$$\dot{x}(t) = ax(t) - \alpha(t)$$
$$x(0) = x^0 > 0$$

donde

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0,T] \to \mathbb{R} : \alpha \text{ es continua a trozos } \}.$$

Definimos el Hamiltoniano $H(t,x,\alpha,p) = -\alpha^2 + p(ax-\alpha)$

y la ecuación de coestado

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x}H(t,x^*,\alpha^*,p) = -ap$$
$$p(T) = \nabla_x\psi(x(T)) = -1$$

de donde obtenemos que $p(t) = -e^{-a(t-T)}$. Además

$$0 = H_\alpha(t,x^*,\alpha^*,p) = -2\alpha^* - p = -2\alpha^* + e^{-a(t-T)}$$

de donde tenemos que $\alpha^*(t) = \frac{1}{2}e^{-a(t-T)}$. Finalmente podemos encontrar

$$x^*(t) = x_0e^{at} + \frac{1}{4a}e^{aT}(e^{-at} - e^{at}).$$

Consideramos de nuevo el modelo de las células tumorales con

- $\alpha(t) \in [0, K]$: cantidad de medicamento sea no negativa y no valga más que una cierta capacidad máxima que toleran los pacientes.

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} J(\alpha) := -\int_0^T \alpha^2(t)dt - x(T)$$
$$\dot{x}(t) = ax(t) - \alpha(t)$$
$$x(0) = x^0 > 0$$
$$\alpha(t) \in [0, K]$$

es decir, en este caso el conjunto de controles admisibles es

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, T] \to [0, K], \quad \alpha \text{ es continua a trozos } \}.$$

Supongamos que α^* es un control óptimo, es decir, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$J(\alpha^*) \geq J(\alpha).$$

Si repetimos los argumentos anteriores y dados $\varepsilon > 0$ y $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ continua, definimos

$$\alpha_\varepsilon = \alpha^* + \varepsilon h$$

vemos que puede pasar que $\alpha_\varepsilon(t) \notin [0, K]$.

Para cada $t \in [0, T]$ punto de continuidad de α, tenemos tres casos:

- Si $\alpha^*(t) \in (0, K)$ entonces, dada h cualquiera continua, existe $\varepsilon_0 > 0$ al que $\alpha^\varepsilon(t) = \alpha^*(t) + \varepsilon h(t) \in (0, K)$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.
- Si $\alpha^*(t) = 0$ entonces, necesitamos pedir $h(t) \geq 0$ para garantizar que $\alpha^\varepsilon(t) = \alpha^*(t) + \varepsilon h(t) \geq 0$ y si además queremos $\alpha^\varepsilon(t) \leq K$ elegimos $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ con ε_0 adecuado.
- Si $\alpha^*(t) = K$ entonces, necesitamos pedir $h(t) \leq 0$ para garantizar que $\alpha^\varepsilon(t) = \alpha^*(t) + \varepsilon h(t) \leq K$ y si además queremos $\alpha^\varepsilon(t) \geq 0$ elegimos $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ con ε_0 adecuado.

De las cuentas hechas en la sección anterior llegamos a la desigualdad

$$\int_0^T \underbrace{\left(\nabla_\alpha L^*(t) + p(t)\nabla_\alpha f^*(t)\right)}_{H^*_\alpha(t)} h(t) \leq 0$$

Luego

- Si $\alpha^*(t) \in (0, K)$ como $h(t)$ no tiene signo, obtenemos que $H^*_\alpha(t) = 0$.
- Si $\alpha^*(t) = 0$, como $h(t) \geq 0$ obtenemos $H^*_\alpha(t) \leq 0$.
- Si $\alpha^*(t) = K$, como $h(t) \leq 0$ obtenemos $H^*_\alpha(t) \geq 0$.

Teníamos

- Si $\alpha^*(t) \in (0, K) \rightarrow H^*_\alpha(t) = 0$.
- Si $\alpha^*(t) = 0 \rightarrow H^*_\alpha(t) \leq 0$.
- Si $\alpha^*(t) = K \rightarrow H^*_\alpha(t) \geq 0$.

Concluimos entonces que

- Si $H^*_\alpha(t) < 0$, entonces $\alpha^*(t) = 0$.
- Si $H^*_\alpha(t) > 0$, entonces $\alpha^*(t) = K$.

Volvamos al ejemplo. Teníamos

$$H(t, x, \alpha, p) = -\alpha^2 + p(ax(t) - \alpha(t).)$$

La ecuación de coestado

$$\dot{p} = -ap$$
$$p(T) = -1$$

de donde obtuvimos que $p(t) = -e^{-a(t-T)}$.

Calculamos

$$H_\alpha(t, x, \alpha, p) = -2\alpha - p = -2\alpha + e^{-a(t-T)}$$

de donde tenemos que

- $$H_\alpha^*(t) = -2\alpha^* + e^{-a(t-T)} > 0 \Rightarrow \alpha^*(t) = K$$

  $$\Rightarrow\ e^{-a(t-T)} > 2\alpha^* = 2K\ \Rightarrow\ t < T - \frac{\ln(2K)}{a}.$$

- $$H_\alpha^*(t) = -2\alpha^* + e^{-a(t-T)} < 0 \Rightarrow \alpha^*(t) = 0$$

  $$\Rightarrow\ e^{-a(t-T)} < 0\ \Rightarrow\ \text{nunca ocurre.}$$

- $$H_\alpha^*(t) = -2\alpha^* + e^{-a(t-T)} = 0\ \Rightarrow\ \alpha^*(t) = \frac{e^{-a(t-T)}}{2} \in [0, K]$$

  $$\Rightarrow t \geq T - \frac{\ln(2K)}{a}.$$

Concluimos entonces que

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} K & \text{si} \quad 0 \leq t < T - \frac{\ln(2K)}{a} \\ \frac{e^{-a(t-T)}}{2} & \text{si} \quad T - \frac{\ln(2K)}{a} \leq t \leq T \end{cases}$$

Algunos comentarios:

- α^* es una función continua
- Si $e^{aT} < 2K$ ($T - \frac{\ln(2K)}{a} < 0$) tendremos $\alpha^*(t) = \frac{e^{-a(t-T)}}{2}$ en $[0, T]$
- Si $2K < 1$ ($T - \frac{\ln(2K)}{a} > T$) tendremos $\alpha^*(t) = K$ en $[0, T]$

El problema de control óptimo con restricciones en el control general

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T))$$
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t))$$
$$x(0) = x^0$$
$$\alpha_i(t) \in [a_i, b_i] \text{ para } i = 1, \cdots, m$$

donde $\mathcal{A} = \left\{\alpha : [0, T] \to R = \prod_{i=1}^{m}[a_i, b_i] : \alpha \text{ es continua a trozos } \right\}$.

Teorema

Si α^* es un control óptimo del problema y $x^* = x[\alpha^*]$, entonces existe $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ función continua con derivada continua a trozos tal que si definimos $H(t, x, \alpha, p) = L(t, x, \alpha) + pf(t, x, \alpha)$, se tiene que

$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*, \alpha^*, p)$ $\rightarrow$ *ecuación de coestado*

$p(T) = \nabla_x \psi(x(T))$ $\rightarrow$ *condición de transversalidad*

Para casi todo $t \in [0, T]$

$H(t, x^*(t), \alpha^*(t), p(t)) \geq H(t, x^*(t), a, p(t))$ $\rightarrow$ *condición de optimalidad*

para todo $a \in R$

Comentario:

La condición de optimalidad junto con que $\alpha_i \in [a_i, b_i]$ nos dice:

- Si $\alpha_i(t) \in (a_i, b_i)$ entonces $H^*_{\alpha_i}(t) = 0$.
- Si $\alpha_i(t) = a_i$, entonces $H^*_{\alpha_i}(t) \leq 0$.
- Si $\alpha_i(t) = b_i$, entonces $H^*_{\alpha_i}(t) \geq 0$.

de donde concluimos que

- Si $H^*_{\alpha_i}(t) < 0$, entonces $\alpha_i(t) = a_i$.
- Si $H^*_{\alpha_i}(t) > 0$, entonces $\alpha_i(t) = b_i$.

PMP lineal en el control

Consideremos el problema de la fábrica, es decir

$$\max_{\alpha} \int_0^T (1-\alpha(t))x(t)dt$$
$$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t)$$
$$x(0) = x^0$$
$$\alpha(t) \in [0,1]$$

Definimos el Hamiltoniano (independiente de t)

$$H(x,\alpha,p) = (1-\alpha)x + pk\alpha x = x + \alpha(-x+kpx)$$

y planteamos la ecuación de coestado

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*,\alpha^*,p) = -1 + \alpha - pk\alpha$$
$$p(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(T)) = 0.$$

Además si α^* es óptimo debe pasar que para casi todo $t \in [0,T]$

$$H(x^*(t),\alpha^*(t),p(t)) \geq H(x^*(t),a,p(t))$$

para todo $a \in [0,1]$.

$$H_\alpha(x,\alpha,p) = -x + pkx = x(pk-1)$$

no depende de α^* y por lo tanto no nos da información sobre el control!

En este caso volvemos a la ecuación de optimalidad: para todo $t \in [0,T]$

$$x^*(t) + \alpha^*(t)(-x^*(t) + kp(t)x^*(t)) \geq x^*(t) + a(-x^*(t) + kp(t)x^*(t)),$$

equivalentemente

$$\alpha^*(t)(-x^*(t) + kp(t)x^*(t)) \geq a(-x^*(t) + kp(t)x^*(t))$$

para todo $a \in [0,1]$.

Definimos la función de cambio (switching function)

$$\phi(t) = -x^*(t) + kp(t)x^*(t) = x^*(t)(kp(t)-1)$$

tenemos que para cada $t \in [0,T]$

$$\alpha^*(t)\phi(t) \geq a\phi(t) \text{ para todo } a \in [0,1]$$

de donde vemos que

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \phi(t) < 0 \\ ? & \text{si} \quad \phi(t) = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \phi(t) > 0 \end{cases}$$

Teníamos

$$\max_{\alpha} \int_0^T (1-\alpha(t))x(t)dt$$
$$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t), \quad \text{con } k>0$$
$$x(0) = x^0$$
$$\alpha(t) \in [0,1]$$

Si α^* es óptimo, el estado asociado queda determinado por

$$x^*(t) = x^0 e^{\int_0^t k\alpha^*(s)ds},$$

luego siendo $x^0 > 0$ se tiene que $x^*(t) > 0$ para todo $t \in [0,T]$.

Entonces si $\phi(t) = x^*(t)(kp(t)-1) = 0$ en $[a,b] \subset [0,1]$, debe ser $p(t) = \frac{1}{k}$ en $[a,b]$. Con lo cual

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p(t) < 1/k \\ ? & \text{si} \quad p(t) = 1/k \\ 1 & \text{si} \quad p(t) > 1/k \end{cases}$$

Pero no puede ser $p(t) = \frac{1}{k}$ en un intervalo ya que no satisface la ode de p. Entonces para casi todo $t \in [0,T]$ podemos decir que

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p(t) < 1/k \\ 1 & \text{si} \quad p(t) > 1/k \end{cases} .$$

Tenemos

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p(t) < 1/k \\ 1 & \text{si} \quad p(t) > 1/k \end{cases}$$

$$\dot{p}(t) = -1 + \alpha^*(t)(1 - p(t)k)$$

$$p(T) = 0.$$

Analizamos ahora las condiciones sobre p.

- Como $p(T) = 0$, vemos por continuidad que $p(t) \leq \frac{1}{k}$ en algún intervalo a izquierda de T. Para esos valores de $t < T$ cercanos, $\alpha^*(t) = 0$.
- Entonces

  $$p(t) = T - t$$

  mientras $p(t) < \frac{1}{k}$ que vale si $t > T - \frac{1}{k} = t^*$.
- $t^* = T - \frac{1}{k} > 0$ si y solo si $Tk > 1$.
- Si $t < t^*$ con t cercano a t^*, por continuidad de p, $p(t) \sim p(t^*) = \frac{1}{k}$. Entonces $\dot{p}(t) \sim -1$ con lo cual p decrece y por lo tanto $p(t) > p(t^*) = \frac{1}{k}$. Luego $\alpha^*(t) = 1$ para esos valores de t.
- Luego

  $$p(t) = \frac{1}{k} e^{-k(t-t^*)} > \frac{1}{k}$$

  mientras $t < t^*$.

En conclusión

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < T - \frac{1}{k} \\ 0 & \text{si} \quad T - \frac{1}{k} < t \leq T \end{cases}$$

y

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{-k(t - T + \frac{1}{k})} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T - \frac{1}{k} \\ \\ T - t & \text{si} \quad T - \frac{1}{k} < t \leq T \end{cases} .$$

Además de la ecuación de $\dot{x}^*(t) = k\alpha^*(t)x^*(t)$ tenemos que

$$x^*(t) = \begin{cases} x^0 e^{kt} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T - \frac{1}{k} \\ \\ x^0 e^{kT-1} & \text{si} \quad T - \frac{1}{k} < t \leq T \end{cases} .$$

En general, un problema de control óptimo lineal en un control tiene la forma

$$\max_{\alpha} \int_0^T (L_1(t,x(t)) + L_2(t,x(t))\alpha(t))\, dt + \Psi(x(T))$$
$$\dot{x}(t) = f_1(t,x(t)) + f_2(t,x(t))\alpha(t)$$
$$x(0) = x^0$$
$$\alpha(t) \in [a_1, b_1]$$

Definimos el Hamiltoniano

$$H(t,x,\alpha,p) = L_1(t,x(t)) + L_2(t,x(t))\alpha(t) + p\,(f_1(t,x(t)) + f_2(t,x(t))\alpha(t))\,.$$

La ecuación de coestado es

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \alpha^*, p)$$
$$p(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(T)).$$

Además si α^* es óptimo debe pasar que para casi todo $t \in [0,T]$

$$H(x^*(t), \alpha^*(t), p(t)) \geq H(x^*(t), a, p(t))$$

para todo $a \in [a_1, b_1]$.

La ecuación de optimalidad: para todo $t \in [0,T]$

$$H(x^*(t),\alpha^*(t),p(t)) \geq H(x^*(t),a,p(t))$$

para todo $a \in [a,b]$.

$$\begin{aligned} L_1(t,x^*(t)) + L_2(t,x^*(t))\alpha^*(t) + p(t)\left(f_1(t,x^*(t)) + f_2(t,x^*(t))\alpha(t)\right) \\ \geq L_1(t,x^*(t)) + L_2(t,x^*(t))a + p(t)\left(f_1(t,x^*(t)) + f_2(t,x^*(t))a\right), \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\left(L_2(t,x^*(t)) + p(t)f_2(t,x^*(t))\right)\alpha(t) \geq \left(L_2(t,x^*(t)) + p(t)f_2(t,x^*(t))\right)a,$$

para todo $a \in [a_1,b_1]$.
Definimos la función de cambio (switching function)

$$\phi(t) = L_2(t,x^*(t)) + p(t)f_2(t,x^*(t))$$

tenemos que para cada $t \in [0,T]$

$$\alpha^*(t)\phi(t) \geq a\phi(t) \text{ para todo } a \in [a_1,b_1]$$

de donde vemos que

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} a_1 & \text{si} \quad \phi(t) < 0 \\ ? & \text{si} \quad \phi(t) = 0 \\ b_1 & \text{si} \quad \phi(t) > 0 \end{cases}$$

Si $\phi(t) = 0$ en algún subintervalo $[t_0, t_1] \subset [0, T]$ no tenemos información para determinar el control α^*.

Si logramos probar a partir del problema concreto que $\phi(t)$ se anula en puntos aislados, tendremos

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} a_1 & \text{si} \quad \phi(t) < 0 \\ b_1 & \text{si} \quad \phi(t) > 0 \end{cases}$$

que es lo que se conoce como **control bang bang** que toma alternadamente los valores a_1 y a_2 (extremos del intervalo donde toma los posibles valores el control). La cantidad de saltos del control dependerá de cuántos cambios de signo tenga $\phi(t)$.

Si existe un subintervalo donde $\phi(t) = 0$ se dice que tenemos un **control singular** en ese intervalo.

Otro ejemplo

$$\max_{\alpha} \int_0^2 e^t \left(1 - \alpha(t)\right)$$
$$\dot{x}(t) = x(t)\alpha(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$\alpha(t) \in [0, 1]$$

Definimos el Hamiltoniano

$$H(t, x, \alpha, p) = e^t (1 - \alpha) + px\alpha.$$

La ecuación de coestado es

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*, \alpha^*, p) = -p\alpha^*$$
$$p(2) = 0.$$

Además si α^* es óptimo debe pasar que para casi todo $t \in [0, T]$

$$e^t (1 - \alpha^*(t)) + p(t)x^*(t)\alpha(t) \geq e^t (1 - a) + px^*(t)a$$

para todo $a \in [0, 1]$.

De

$$e^t(1-\alpha^*(t)) + p(t)x^*(t)\alpha(t) \geq e^t(1-a) + px^*(t)a$$

para todo $a \in [0,1]$. tenemos

$$\left(-e^t + p(t)x^*(t)\right)\alpha(t) \geq \left(-e^t + p(t)x^*(t)\right)a$$

para todo $a \in [0,1]$. Es decir, si $\phi(t) = -e^t + p(t)x^*(t)$

$\alpha^*(t)\phi(t) \geq a\phi(t)$ para todo $a \in [0,1]$.

Veamos si ϕ se anula en algún subintervalo $[t_0, t_1] \subset [0,2]$. Suponemos que sí, entonces

$$e^t = p(t)x^*(t)$$

en un intervalo. Derivando en ese intervalo, llegamos a la contradicción

$$e^t = -p(t)\alpha^*(t)x^*(t) + p(t)x^*(t)\alpha^*(t) = 0$$

lo cual nos dice que ϕ no se anula en ningún subintervalo y entonces el control es bang bang.

Luego

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \phi(t) < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \phi(t) > 0 \end{cases}$$

Veamos el signo de $\phi(t) = -e^t + p(t)x^*(t)$. De la ecuación de $p(t)$,

$$\dot{p} = -p\alpha^*$$
$$p(2) = 0.$$

vemos que la única solución es $p(t) \equiv 0$, de donde $\phi(t) = -e^t < 0$ para todo $t \in [0, 2]$ y por lo tanto

$$\alpha^*(t) \equiv 0.$$

Consideremos de nuevo el problema de la fábrica con $T = 4$, $k = 2$, $x_0 = 1$ y la condición que

- La ganancia en el tiempo final T no sea menor que 2000.

$$\max_{\alpha} \int_0^4 (1 - \alpha(t))x(t)dt$$

$$\dot{x}(t) = 2\alpha(t)x(t)$$

$$x(0) = 1$$

$$\alpha(t) \in [0, 1]$$

$$x(4) \geq 2000$$

Consideramos el problema de optimización

$$\max_{a \in \mathbb{R}^m} F(x)$$
$$G(x) = 0, \quad H(x) \geq 0$$

donde $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ son diferenciables.

De las condiciones de KKT sabemos que si a^* es un óptimo, existen $\lambda_0 \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^k, \mu \in \mathbb{R}^l$ no nulos a la vez, tales que

$$\lambda_0 \nabla F(a^*) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla G_j(a^*) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla H_j(a^*) = \vec{0}$$
$$\mu_i \geq 0 \text{ para todo } i = 1, \cdots, l, \quad \mu_i \cdot H_i(a^*) = 0$$

En el caso en que $\lambda_0 \neq 0$ se dice que el problema es “normal” y se normaliza tomando $\lambda_0 = 1$.

Vamos a estudiar ahora el problema general

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T)) \\
&\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t)) \\
&x(0) = x^0 \\
&\alpha_i(t) \in [a_i, b_i] \text{ para } i = 1, \cdots, m \\
&\Phi_1(x(T)) \geq 0 \\
&\Phi_2(x(T)) = 0
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{A} = \Big\{\alpha : [0, T] \to R = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] : \alpha \text{ es continua a trozos y } \Phi_1(x[\alpha](T)) \geq 0, \quad \Phi_2(x[\alpha](T))\}$$

y $\Phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \Phi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ son de clase C^1.

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) := \int_0^T L(t, x[\alpha](t), \alpha(t))dt + \psi(x[\alpha](T))$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t)), \qquad x(0) = x^0$$

$$\alpha_i(t) \in [a_i, b_i] \text{ para } i = 1, \cdots, m,\ \Phi_1(x(T)) \geq 0,\ \Phi_2(x(T)) = 0$$

Teorema

Si α^* *es un control óptimo del problema general anterior y* $x^* = x[\alpha^*]$*, entonces existen* $\lambda_0 \geq 0$*,* $\beta \in \mathbb{R}^k, \gamma \in \mathbb{R}^l$ *y* $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *función continua con derivada continua a trozos tal que* $(\lambda_0, \beta, \gamma, p(t)) \neq 0$ *para todo* t*. Si definimos* $H(t, x, \alpha, p, \lambda_0) = \lambda_0 L(t, x, \alpha) + pf(t, x, \alpha)$*, se tiene*

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x^*, \alpha^*, p) \qquad \to \textit{coestado}$$

$$p(T) = \lambda_0 \nabla_x \psi(x(T)) + \beta D\Phi_1(x(T)) + \gamma D\Phi_2(x(T)) \qquad \to \textit{transversalidad}$$

$$\beta\Phi_1(x(T)) = 0 \ \textit{con}\ \beta_i \geq 0 \qquad \to \textit{complementaridad}$$

Para casi todo $t \in [0, T]$

$$H(t, x^*(t), \alpha^*(t), p(t)) \geq H(t, x^*(t), a, p(t)) \qquad \to \textit{optimalidad}$$

para todo $a \in R$.

Volviendo al ejemplo de la fábrica

$$\max_{\alpha} \int_0^4 (1-\alpha(t))x(t)dt$$
$$\dot{x}(t) = 2\alpha(t)x(t)$$
$$x(0) = 1$$
$$\alpha(t) \in [0,1]$$
$$x(4) \geq 2000 \quad \rightarrow \Phi_1(x) = x - 2000$$

Si α^* es un control óptimo y $x^* = x[\alpha^*]$, entonces existen $\lambda_0 \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $p : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\lambda_0, \beta, p(t)) \neq 0$ para todo t. Además si definimos

$$H(x,\alpha,p,\lambda_0) = \lambda_0(1-\alpha)x + 2p\alpha x = \lambda_0 x + \alpha x(-\lambda_0 + 2p)$$

se tiene que

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, \alpha^*, p, \lambda_0) = -\lambda_0(1-\alpha) - 2p\alpha$$
$$p(4) = \lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(4)) + \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x^*(4)) = \beta$$
$$\beta(x(4) - 2000) = 0 \text{ con } \beta \geq 0$$
$$\alpha^*(t)\, \underbrace{x^*(t)(-\lambda_0 + 2p)}_{\phi(t)} \geq a\, \underbrace{x^*(t)(-\lambda_0 + 2p)}_{\phi(t)} \text{ para todo } a \in [0,1]$$

Dada la función de cambio (switching function)

$$\phi(t) = x^*(t)(2p(t) - \lambda_0)$$

tenemos que para cada $t \in [0, T]$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \phi(t) < 0 \\ ? & \text{si} \quad \phi(t) = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \phi(t) > 0 \end{cases} .$$

Por otro lado teníamos

$$\dot{x}(t) = 2\alpha(t)x(t)$$
$$x(0) = 1$$

Si α^* es óptimo, el estado asociado queda determinado por

$$x^*(t) = e^{\int_0^t 2\alpha^*(s)ds} > 0$$

para todo $t \in [0, 4]$. Luego

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2p(t) < \lambda_0 \\ ? & \text{si} \quad 2p(t) = \lambda_0 \\ 1 & \text{si} \quad 2p(t) > \lambda_0 \end{cases} .$$

Veamos si el problema es normal. Supongamos que $\lambda_0 = 0$, de la ecuación de coestado:

$$\dot{p}(t) = -\lambda_0(1 - \alpha^*(t)) - 2p(t)\alpha^*(t) = -2p(t)\alpha^*(t)$$
$$p(4) = \beta.$$

de donde obtenemos

$$p(t) = \beta e^{\int_t^4 2\alpha^*(s)ds}.$$

Luego si $\beta = 0$, tendríamos $p \equiv 0$ lo cual contradice la condición de no nulidad de los multiplicadores. Entonces $\beta > 0$. Esto nos dice:

- $x^*(4) = 2000$.
- $p(t) > 0$ para todo $t \in [0, 4]$.

Además siendo $\lambda_0 = 0$, como $p(t) > 0$ se tiene $\alpha^* \equiv 1$ y $x^*(t) = e^{2t}$, contradiciendo que $x^*(4) = 2000$.

A partir de acá podemos suponer $\lambda_0 = 1$. Tenemos

$$\dot{p}(t) = -1 + \alpha^*(t)(1 - 2p(t))$$
$$p(4) = \beta \geq 0.$$

y

$$\phi(t) = x^*(t)(2p(t) - 1).$$

Vemos de nuevo que no puede ser $p(t) = \frac{1}{2}$ en un intervalo ya que no satisface la ode de p.

Es decir el control es bang bang

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p(t) < 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad p(t) > 1/2 \end{cases}.$$

Analizamos las condiciones sobre p. Empezamos con el caso $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

- Como $p(4) = \beta$, vemos por continuidad que $p(t) \leq \frac{1}{2}$ en algún intervalo a izquierda de 4. Para esos valores de $t < 4$ cercanos, $\alpha^*(t) = 0$.
- Entonces

$$p(t) = \beta + 4 - t$$

  mientras $p(t) < \frac{1}{2}$ que vale si $t > \beta + 4 - \frac{1}{2} = t_\beta \in (0, 4)$.
- Si $t < t_\beta$ con t cercano a t_β, por continuidad de p, $p(t) \sim p(t_\beta) = \frac{1}{2}$. Entonces $\dot{p}(t) \sim -1$ con lo cual p decrece y por lo tanto $p(t) > p(t_\beta) = \frac{1}{2}$. Luego $\alpha^*(t) = 1$ para esos valores de t.
- Entonces

$$p(t) = \frac{1}{2} e^{-2(t - t_\beta)} > \frac{1}{2}$$

  mientras $t < t_\beta$.

En conclusión

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < t_\beta \\ 0 & \text{si} \quad t_\beta < t \leq 4 \end{cases}$$

y

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-2(t-t_\beta)} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_\beta \\ \\ \beta + T - t & \text{si} \quad t_\beta < t \leq 4 \end{cases}.$$

Además de la ecuación de $\dot{x}^*(t) = 2\alpha^*(t)x^*(t)$ tenemos que

$$x^*(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_\beta \\ \\ e^{2t_\beta} & \text{si} \quad t_\beta < t \leq 4 \end{cases}$$

y usando que debe ser $x^*(4) = 2000$ despejamos $\beta = \frac{\ln(2000)-7}{2} \in (0, \frac{1}{2})$.

Por otro lado, si $\beta > \frac{1}{2}$

- Como $p(4) = \beta > \frac{1}{2}$, vemos por continuidad que $p(t) > \frac{1}{2}$ para $t < 4$ cercanos. Para esos valores de $t < 4$ cercanos, $\alpha^*(t) = 1$.
- Entonces
$$p(t) = \beta e^{-2(t-4)} > \frac{1}{2}$$
mientras $t < 4$.

En este caso
$$\alpha^*(t) = 1,$$
y entonces
$$x^*(t) = e^{2t}$$
y usando que debe ser $x^*(4) = 2000$ llegamos a una contradicción.

Ejercicio Analizar el caso $\beta = \frac{1}{2}$ (similar a $\beta > \frac{1}{2}$ y el caso $\beta = 0$ (se recupera el caso original sin restricciones en el estado final que no satisface dicha restricción).

$$\min_{\alpha} \int_0^4 \alpha^2(t) + x(t)dt$$
$$\dot{x}(t) = \alpha(t)$$
$$x(0) = 0$$
$$x(4) = 1 \quad \rightarrow \quad \Phi_2(x) = x - 1$$

Si α^* es un control óptimo y $x^* = x[\alpha^*]$, entonces existen $\lambda_0 \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $p : [0, T] \to \mathbb{R}$ tal que $(\lambda_0, \gamma, p(t)) \neq 0$ para todo t. Si definimos

$$H(x, \alpha, p, \lambda_0) = \lambda_0(\alpha^2 + x) + p\alpha$$

se tiene que

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, \alpha^*, p, \lambda_0) = -\lambda_0$$
$$p(4) = \lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x^*(4)) + \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x^*(4)) = \gamma$$
$$H_\alpha(x^*, \alpha^*, p, \lambda_0) = 2\lambda_0\alpha^* + p = 0$$

Veamos si el problema es normal. Supongamos que $\lambda_0 = 0$, de la ecuación de coestado:

$$\dot{p} = -\lambda_0 = 0$$
$$p(4) = \gamma.$$

de donde obtenemos

$$p(t) \equiv \gamma.$$

De

$$H_\alpha(x^*, \alpha^*, p, \lambda_0) = 2\lambda_0\alpha^* + p = 0$$

tendríamos $p \equiv \gamma = 0$ lo cual contradice la no nulidad de los multiplicadores. Luego podemos tomar $\lambda_0 = 1$ y nos queda

$$\dot{p} = -1$$
$$p(4) = \gamma$$
$$H_\alpha(x^*, \alpha^*, p, \lambda_0) = 2\alpha^* + p = 0$$

es decir,

$$p(t) = -t + k$$
$$\alpha^*(t) = -\frac{1}{2}(-t + k).$$

$$
\begin{aligned}
p(t) &= -t + k \\
\alpha^*(t) &= -\frac{1}{2}(-t + k).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \alpha(t) = -\frac{1}{2}(-t + k) \\
x(0) &= 0 \\
x(4) &= 1
\end{aligned}
$$

nos queda $x^*(t) = \frac{t^2 - 3t}{4}$ con $k = \frac{3}{2}$ de manera que $\alpha^*(t) = -\frac{1}{2}(t - \frac{3}{2})$.

References

- Lawrence Evans. *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*. Department of Mathematics University of California, Berkeley. 1983.
- Francis Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer. 2013.
- Eduardo D. Sontag. *Mathematical control theory*. 1990.
- Emmanuel Trelat. *Controle Optimal, Theorie & Applications*. Mathematique Concrete. Vuivert. 2005.
- Suzanne Lenhart, John Workman. *Optimal Control Applied to Biological Model*. Chapman & Hall/CRC. 2007.