Juegos de Asignación: Soluciones Cooperativas y Competitivas

ALEJANDRO NEME

Instituto de Matemática Aplicada-San Luis (IMASL)
UNSL-CONICET

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca

junio de 2023

Introducción

- El objetivo es presentar un juego de asignación asociado a un mercado en el cual:
  - Los agentes pueden ser divididos a priori en dos conjuntos disjuntos.
  - La asignación debe ser bilateral.
  - Los agentes tienen preferencias sobre el conjunto de agentes del otro lado del mercado.
- Ejemplos:
  - Mercado de trabajo
  - Compradores a vendedores
  - Trabajadores a firmas
  - Subastas
  - Estudiantes a universidad
  - Médicos internos a hospitales
  - Riñón cadavérico a paciente en lista de espera
  - Etc.

Introducción

- En algunos modelos las preferencias de los agentes son ordinales y en otros cardinales.
- El objetivo es asignar a cada agente un conjunto de agentes del otro lado del mercado.
- Esta asignación debe satisfacer ciertas propiedades deseables.
  - Estabilidad, eficiencia, etc.

Introducción

Gale and Shapley (ordinal models).

- D. Gale and L. Shapley. "College admissions and the stability of marriage," *American Mathematical Monthly* 69, 9-15 (1962).
  - ⋆ Mercados 1-1.
  - ⋆ Problema del compañero de cuarto.
  - ⋆ Problema de admisión a los colegios.

Shapley and Shubik (cardinal model).

- L. Shapley and M. Shubik. "The assignment game I: the core," *International Journal of Game Theory* 1, 111-130 (1972).
  - ⋆ Asignación de un comprador a un vendedor (potencial uso de precios).

- Estudiaremos un juego de asignación generalizado que representa un mercado con un número determinado de unidades de diferentes bienes indivisibles.
- Los vendedores poseen diferentes unidades de cada uno de los bienes.
- Los compradores pueden comprar varias unidades de los diferentes bienes hasta una cantidad exógena que proviene de su capacidad de almacenamiento o transporte.
- Los conjuntos de compradores y vendedores son disjuntos.

Juego de asignación generalizados

- Cada vendedor asigna un valor (o precio de reserva) a cada unidad de los diferentes bienes que posee.
- Cada comprador asigna una valoración (o máxima disposición a pagar) a cada unidad de los diferentes bienes del mercado.
- Cada agente puede asignarse a (realizar una transacción con) muchos agentes del otro lado del mercado y con diferentes tipos de contratos.
- La utilidad es transferible porque el dinero puede usarse como medio de intercambio.
- Una unidad de un bien particular, propiedad de un vendedor, puede ser diferente de una unidad de otro bien propiedad del mismo vendedor.
- Los compradores pueden estar dispuestos a comprar varias unidades de diferentes bienes.

Juego de asignación generalizados

- Las principales preguntas a responder son:
  - ¿Cuál es la asignación óptima de bienes a los compradores?
  - ¿Cuáles son los precios (si los hay) que equilibrarían el mercado?
  - ¿Cuál es el subconjunto de bienes que de hecho se intercambian?
  - ¿Cuál es la utilidad (totales) que podrían recibir los agentes?
  - ¿Las soluciones propuestas son estables y/o eficientes?

Juego de asignación generalizados

Agentes:

- Conjunto de $m-$*compradores* $B = \{b_1, ..., b_m\}$ $(i \in B)$.
- Conjunto de $t-$vendedores $S = \{s_1, ..., s_t\}$ $(k \in S)$.

Bienes:

- Conjunto de $n-$diferentes tipos de bienes $G = \{g_1, ..., g_n\}$ $(j \in G)$.

Juego de asignación generalizados

Valuaciones:

- Sea $v_{ij} \geq 0$ la valuación monetaria que el comprador b_i le asigna al bien g_j. Es decir, el máximo precios que el comprador b_i pagaría gustoso por el producto g_j.
  Matrix de valuaciones: $V = \left(v_{ij}\right)_{(i,j)\in B\times G}$.

Precio de reserva:

- Sea $r_{jk} \geq 0$ es el precio de reserva del vendedor s_k sobre su producto g_j. Es decir, el mínimo precio que el vendedor s_k esta dispuesto a recibir por vender una unidad del bien g_j.
  Matriz de precios de reserva: $R = \left(r_{jk}\right)_{(j,k)\in G\times S}$.

Juego de asignación generalizados

Restricciones:

- Cada comprador $b_i \in B$ puede comprar $d_i > 0$ unidades en total. Denotamos $d = (d_i)_{i \in B}$.
- Cada vendedor s_k posee $q_{jk} \in \mathbb{Z}_+$ unidades del bien $g_j \in G$. Denotamos $Q = (q_{jk})_{(j,k) \in G \times S}$.
- Dos condiciones adicionales:

$$q_{jk} = 0 \Rightarrow r_{jk} = 0.$$

$$\forall j \in G \ \exists k \in S \text{ tal que } q_{jk} > 0.$$

Literatura

- L. Shapley and M. Shubik. *International Journal of Game Theory* (1972).
  - $d_i = 1 \ \forall i \in B$.
  - $G \simeq S$; $q_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$
- E. Camiña. *Mathematical Social Sciences* (2006).
  - $d_i = 1 \ \forall i \in B$.
  - $|G| = n$ pero $|S| = 1$.
- M. Sotomayor. *Journal of Economic Theory* (2007).
  - $G \simeq S$; $q_{jk} \in \mathbb{Z}_{++}$ si $j = k$, $q_{jk} = 0$ if $j \neq k$.
  - Los compradores pueden querer comprar más de un bien indivisible ($d_i \in \mathbb{Z}_{++} \ \forall i \in B$) aunque no están interesados en adquirir más de un bien a un determinado vendedor ($A_{ijk} \in \{0, 1\} \ \forall j = k$).

Juego de asignación generalizados

- Un mercado M es una 7-tuple (B, G, S, V, d, R, Q).
- Dado un comprador b_i, vendedor s_k y un bien g_j;

$$\tau_{ijk} = \begin{cases} v_{ij} - r_{jk} & \text{si } q_{jk} > 0 \\ 0 & \text{si } q_{jk} = 0 \end{cases}$$

  es el valor del intercambio entre b_i, s_k del bien g_j.
- Sea $T = (\tau_{ijk})_{(i,j,k)\in B\times G\times S}$ la matriz de los valores de los intercambios.

Asignaciones factibles

- Una asignación es una matriz

$$A = (A_{ijk})_{(i,j,k)\in B\times G\times S} \in \mathbb{Z}_+^{m\times n\times t}$$

- El valor A_{ijk} debe ser interpretado como la cantidad de unidades del bien j que el comprador i recibe del vendedor k.
- Una asignación A es factible si satisface las restricciones de la oferta y demanda:

(Demanda factible) $\forall i \in B$, $\sum_{jk} A_{ijk} \leq d_i$.

(Oferta factible) $\forall (j,k) \in G \times S$, $\sum_i A_{ijk} \leq q_{jk}$.

- Denotemos por F el conjunto de las asignaciones factibles.

Asignaciones óptimas

- Dada una asignación factible A, sea

$$T(A) = \sum_{ijk} \tau_{ijk} \cdot A_{ijk}.$$

el valor del intercambio total del mercado.

- El primer objetivo es maximizar la ganancia total del mercado.
- Sea A^*, la asignación factible óptima. Es decir $\forall A \in F$,

$$T(A^*) \geq T(A).$$

- Denotemos F^* el conjunto de asignaciones óptimas para M.

Programa lineal

Primal linear Program (PLP):

$$
\begin{array}{llrll}
\multicolumn{3}{c}{\max\limits_{(A_{ijk})_{(i,j,k)\in B\times G\times S}\in\mathbb{R}^{m\times n\times t}}} & \multicolumn{2}{l}{\sum_{ijk} \tau_{ijk}\cdot A_{ijk}} \\
\text{s. t.} & (\text{P.1}) & \sum_{jk} A_{ijk} & \leq d_i & \forall i\in B, \\
 & (\text{P.2}) & \sum_{i} A_{ijk} & \leq q_{jk} & \forall (j,k)\in G\times S, \\
 & (\text{P.3}) & A_{ijk} & \geq 0 & \forall\,(i,j,k)\in B\times G\times S.
\end{array}
$$

- El conjunto F^* es el conjunto de las soluciones entera del **PLP**.

Programa lineal

- Una matriz es totalmente unimodular si cada subdeterminante es 0, $+1$ ó - 1.

Teorema Sea U una matriz totalmente unimodular y b un vector con componentes enteras. Entonces el poliedro $\{x : Ux \leq b\}$ es integral.

- Los resultados de la programación entera garantizan que el Programa Lineal Primal tiene al menos una solución con componentes enteras.
- Aun más, el conjunto de todas las soluciones factibles del Programa Lineal Primal es un politopo cuyos vértices tienen todas las coordenadas enteras.

Teorema (Jaume-Massó-Neme) $F^* \neq \emptyset$.

Equilibrio competitivo

- Consideremos la situación en la cual el comercio entre compradores y vendedores se realiza a través de un mercado competitivo.
- Un vector de precios es $p = (p_j)_{j \in G} \in \mathbb{R}^n_+$.
- Compradores y vendedores son tomadores de precios.
- Dado un vector de precios $p = (p_j)_{j \in G} \in \mathbb{R}^n_+$, los vendedores ofrecen bienes, hasta su capacidad, con el objetivo de maximizar sus ingresos en p y los compradores demandan bienes con el objetivo de maximizar la valuación total en p.

Equilibrio competitivo

Oferta del vendedor k : $\forall p = (p_j)_{j \in G} \in \mathbb{R}^n_+$, la oferta del vendedor k del bien j es: (el vendedor k ofrece del bien j la cantidad factible que maximiza su ingreso)

$$S_{jk}(p_j) = \begin{cases} \{q_{jk}\} & \text{si } p_j > r_{jk} \\ \{0, 1, \ldots, q_{jk}\} & \text{si } p_j = r_{jk} \\ \{0\} & \text{si } p_j < r_{jk}. \end{cases}$$

Equilibrio competitivo

Demanda del comprador i : $\forall p = (p_j)_{j \in G} \in \mathbb{R}^n_+$, la demanda del comprador i es: (cantidad de bienes factibles para maximizar la valuación total),

$$D_i(p) = \{\alpha = (\alpha_{jk})_{(j,k) \in G \times S} \in \mathbb{Z}^{n \times t} \mid \quad \begin{array}{l} \text{(a) } \forall (j,k) \in G \times S,\ \alpha_{jk} \geq 0 \\ \text{(b) } \sum_{jk} \alpha_{jk} \leq d_i \\ \text{(c) } \nabla_i^{>}(p) \neq \emptyset \Longrightarrow \sum_{jk} \alpha_{jk} = d_i \\ \text{(d) } \sum_k \alpha_{jk} > 0 \Longrightarrow j \in \nabla_i^{\geq}(p)\}. \end{array}$$

Donde

$$\nabla_i^{>}(p) = \{j \in G \mid v_{ij} - p_j = \max_{j' \in G}\{v_{ij'} - p_{j'}\} > 0\}$$

$$\nabla_i^{\geq}(p) = \{j \in G \mid v_{ij} - p_j = \max_{j' \in G}\{v_{ij'} - p_{j'}\} \geq 0\}.$$

Equilibrio competitivo

- Dada una asignación factible A, la asignación al comprador i es la matriz:

$$A(i) = (A(i)_{jk})_{(j,k)\in G\times S}.$$

Definición Un equilibrio competitivo es $(p, A) \in \mathbb{R}^n_+ \times F$ tal que:

(E.D) $\forall i \in B$, $A(i) \in D_i(p)$.

(E.S) $\forall j \in G$ y $\forall k \in S$, $\sum_i A_{ijk} \in S_{jk}(p_j)$.

- Un vector precio $p \in \mathbb{R}^n_+$ es un *precio de equilibrio* si existe una asignación factible $A \in F$ $(A \in F^*)$ tal que (p, A) es un equilibrio competitivo.
- Sea P^* el conjunto de precios de equilibrios.
- El objetivo es probar que P^* es no vacío.

Equilibrio competitivo

- Consideremos el dual de **PLP**:

DUAL LINEAR PROGRAM (DLP):

$$
\begin{array}{llrll}
\min\limits_{(\gamma,\pi)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n\times t}} & & \multicolumn{3}{l}{\sum_i d_i \cdot \gamma_i + \sum_{jk} q_{jk} \cdot \pi_{jk}} \\
\text{s. t.} & \text{(D.1)} & \gamma_i + \pi_{jk} & \geq \tau_{ijk} & \text{for all } (i,j,k) \in B \times G \times S, \\
& \text{(D.2)} & \gamma_i & \geq 0 & \text{for all } i \in B, \\
& \text{(D.3)} & \pi_{jk} & \geq 0 & \text{for all } (j,k) \in G \times S.
\end{array}
$$

- Note que $\gamma = (\gamma_i)_{i\in B} \in \mathbb{R}^m$ y $\pi = (\pi_{jk})_{(j,k)\in G\times S} \in \mathbb{R}^{n\times t}$.

- Sean D el conjunto de soluciones factibles y D^* el conjunto de soluciones óptimas de **DLP**.
- D^* es un subconjunto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times t}$.
- Dado $(\gamma, \pi) \in D$ una solución factible del dual. Definimos:

$$T^d(\gamma, \pi) = \sum_i d_i \cdot \gamma_i + \sum_{jk} q_{jk} \cdot \pi_{jk}.$$

el valor de la función objetivo de **DLP**.

- Dada una solución óptima $(\gamma, \pi) \in D^*$ de **DLP**, definimos $p^{(\gamma,\pi)}$,

$$p_j^{(\gamma,\pi)} = \min_{\{k\in S | q_{jk}>0\}} \{\pi_{jk} + r_{jk}\}.$$

Equilibrio competitivo

Strong Duality Theorem *Sean $A \in F$ y $(\gamma, \pi) \in D$. Entonces,*

$$A \in F^* \text{ y } (\gamma, \pi) \in D^* \;\Leftrightarrow\; T(A) = T^d(\gamma, \pi).$$

Complementary Slackness Theorem *Sean $A \in F$ y $(\gamma, \pi) \in D$. Entonces, $A \in F^*$ y $(\gamma, \pi) \in D^*$ si y solo si*

(1) $\forall\,(i, j, k) \in B \times G \times S$, $A_{ijk} \cdot (\gamma_i + \pi_{jk} - \tau_{ijk}) = 0$,

(2) $\forall i \in B$, $(\sum_{jk} A_{ijk} - d_i) \cdot \gamma_i = 0$,

(3) $\forall\,(j, k) \in G \times S$, $(\sum_i A_{ijk} - q_{jk}) \cdot \pi_{jk} = 0$.

Equilibrio competitivo

- Con estos resultados podemos demostrar:

Teorema (Jaume-Massó-Neme) *Sea* $(\gamma, \pi) \in D^* \Rightarrow p^{(\gamma,\pi)} \in P^*$.

- Conclusión:

Teorema (Jaume-Massó-Neme) $P^* \neq \varnothing$.

Equilibrio competitivo

- Dado un vector precio $p \in \mathbb{R}^n_+$, definamos:
  - $\forall i \in B$,

$$\gamma_i(p) = \begin{cases} v_{ij} - p_j & \text{si } \exists j \in \nabla_i^{>}(p) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

  - $\forall (j,k) \in G \times S$,

$$\pi_{jk}(p) = \begin{cases} p_j - r_{jk} & \text{si } p_j - r_{jk} > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $\gamma_i(p)$ es la ganancia obtenida por el comprador i por cada unidad que desea comprar al precio p.
- $\pi_{jk}(p)$ es el beneficio obtenido por el vendedor k por cada unidad del bien j que desea vender al precio p.

Equilibrio competitivo

Teorema (Jaume-Massó-Neme) Sea un vector de precios $p \in \mathbb{R}^n_+$:

(1) *Si* $p \in P^*$. *Entonces* $A \in F^* \Leftrightarrow (p, A)$ *es un equilibrio competitivo.*

(2) $p \in P^* \Leftrightarrow (\gamma(p), \pi(p)) \in D^*$.

Soluciones cooperativas

Massó-Neme

- Ahora consideraremos el TU-game asociado al mercado.
- Estudiaremos diferentes soluciones cooperativas y su relación con el equilibrio competitivo.
- Estas soluciones difieren en como una coalición de compradores y vendedores bloquea una distribución de utilidades propuesta.
- Dada una asignación, podría existir una coalición bloqueadora.
- El concepto de "Core" corresponde a la noción de bloqueo la cual requiere que **todos** los miembros de la coalición rompan **todos** los intercambios asignados con los agentes fuera de la coalición y compren o vendan solo con miembros de la coalición.
- El concepto de "Set-wise stability" corresponde a la noción de bloqueo que admite que los miembros de la coalición puedan mantener **total o parcialmente** sus asignaciones con los miembros fuera de la coalición.

- Un bloqueo usado en el concepto de Core es también un bloqueo usado en el concepto de Set-wise estable. Por lo tanto, **Set-wise estable es un subconjunto del Core.**
- Preguntas:

¿Qué relación existe entre las utilidades obtenidas por los agentes en los tres conceptos?
¿Cuál es el comportamiento de estas utilidades cuando el mercado crece?

Soluciones cooperativas

- Dado un vector de precios $p \in \mathbb{R}^n_+$ y una asignación factible A de $M = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, V, d, R, Q)$.
- La utilidad del comprador $i \in \mathcal{B}$ es:

$$u_i(p, A) = \sum_{jk} (v_{ij} - p_j) \cdot A_{ijk}.$$

- La utilidad del vendedor $k \in \mathcal{S}$:

$$w_k(p, A) = \sum_{ij} (p_j - r_{jk}) \cdot A_{ijk}.$$

Soluciones cooperativas

- Recordemos

$$\gamma_i(p) = \begin{cases} v_{ij} - p_j & \text{si } \exists j \in \nabla_i^{>}(p) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\pi_{jk}(p) = \begin{cases} p_j - r_{jk} & \text{si } p_j - r_{jk} > 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Si $p \in \mathcal{P}^*$ es un vector de precios de equilibrio, entonces:

$$\begin{aligned} u_i(p) &= d_i \cdot \gamma_i(p) \ \forall i \in \mathcal{B} \\ w_k(p) &= \sum_{j \in \mathcal{G}} q_{jk} \cdot \pi_{jk}(p) \ \forall k \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

  es la utilidad obtenida por los agentes en un equilibrio competitivo.
- Sea

$$\mathcal{CE} = \{(u, w) \in \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^S \mid \exists p \in \mathcal{P}^* \text{ t. q. } (u, w) = (u(p), w(p))\}$$

  el conjunto de las utilidades en los diferentes equilibrios competitivos.

- Dada una coalición $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$, notemos $\mathcal{B}^{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{S}^{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$.

Definición Una asignación factible $\widehat{A}$ es *SW−compatible con* $\mathcal{C}$ si $\exists A \in \mathcal{F}$ una asignación optimal tal que:

(i) $\forall i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ijk} \leq A_{ijk}$.

(ii) $\forall k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ijk} \leq A_{ijk}$.

(iii) $\forall i \notin \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \wedge k \notin \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} = 0$; $\forall j \in \mathcal{G}$.

- La condición i) y ii) permite que el intercambio sin restricciones entre dos agentes de la coalición y entre un agente de la coalición y uno que no estés en ella sea menor, pero no necesariamente 0.

Set-wise estable

- Dado un $(i, j, k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}$ tal que $v_{ij} \geq r_{jk}$, la ganancia del intercambio es $v_{ij} - r_{jk}$.
- Comprador y vendedor pueden repartirse la ganancia $v_{ij} \geq \Gamma_{ijk} \geq r_{jk}$.
- Por cada unidad del bien j el comprador i recibe $v_{ij} - \Gamma_{ijk}$ y el vendedor k recibe $\Gamma_{ijk} - r_{jk}$.
- Sea Γ la matriz de distribución de las ganancias.
- Note que si $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{i'jk'}$; $\forall i, i' \in \mathcal{B}$ y $\forall k, k' \in \mathcal{S}$, entonces Γ_{ijk} es un precio, $\Gamma_{ijk} = p_j$.

Set-wise estable

Definición Un vector de utilidades $(u, w) \in \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^S$ **NO** es *SW−bloqueado si* $\exists \Gamma = (\Gamma_{ijk})_{(i,j,k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}}$ tal que $\forall \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ coalición y $\forall \widehat{A}$ asignación factible que es SW−compatible con $\mathcal{C}$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}} u_i + \sum_{k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} w_k \quad & \geq \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} \tau_{ijk} \cdot \widehat{A}_{ijk} + \\
& + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{G} \times (\mathcal{S}^{\mathcal{C}})^c} (v_{ij} - \Gamma_{ijk}) \cdot \widehat{A}_{ijk} + \\
& + \sum_{(i,j,k) \in (\mathcal{B}^{\mathcal{C}})^c \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} (\Gamma_{ijk} - r_{jk}) \cdot \widehat{A}_{ijk}. \\
& \equiv \phi^M(\mathcal{C}, \widehat{A}, \Gamma).
\end{aligned}
$$

Set-wise estable

Definición Un vector de utilidades $(u, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^t$ es *Set-wise estable* si no está $SW-$bloqueado.

- $\mathcal{SW}$ el conjunto de vectores de utilidades Set-wise estable.
- El vector de utilidades de un equilibrio competitivo es un vector Set-wise estables.

Teorema (Massó-Neme) *Sea $p \in \mathcal{P}^*$ un precio de equilibrio. Entonces, $(u(p), w(p)) \in \mathcal{SW}$.*

- Observemos que: $\varnothing \neq \mathcal{CE} \subseteq \mathcal{SW}$.
- Existe un mercado tal que $\varnothing \neq \mathcal{CE} \subsetneq \mathcal{SW}$.

Set-wise estable

- Dado $\rho \in \mathbb{Z}_{++}$ podemos definir $\rho-$replica del mercado: ρM.
- ρM consiste de:
  - ρ compradores del mismo tipo: sean $i_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ y $i_{\alpha'} \in \mathcal{B}_{\alpha'}$ (en replicas α, α') del mismo tipo, entonces tienen las mismas valuaciones ($v_{i_\alpha j} = v_{i_{\alpha'} j} = v_{ij}$, $\forall j \in \mathcal{G}$) y la misma demanda maximal ($d_{i_\alpha} = d_{i_{\alpha'}} = d_i$).
  - ρ vendedores del mismo tipo: sean $k_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$ y $k_{\alpha'} \in \mathcal{S}_{\alpha'}$ (en replicas α, α') del mismo tipo, entonces tienen los mismos precios de reserva ($r_{jk_\alpha} = r_{jk_{\alpha'}} = r_{jk}$, $\forall j \in \mathcal{G}$) y la misma cantidad de cada uno de los bienes ($q_{jk_\alpha} = q_{jk_{\alpha'}} = q_{jk}$, $\forall j \in \mathcal{G}$).

Set-wise estable

- Sea $\mathcal{SW}^{2M}$ conjunto Set$-$wise estables del mercado $2M$ ($\rho = 2$).

Teorema (Massó-Neme) *Sean* $(u, w), (\bar{u}, \bar{w}) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{B}} \times \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ *dos vectores de utilidades del mercado. Entonces,*

$$((u, w), (\bar{u}, \bar{w})) \in \mathcal{SW}^{2M} \;\Leftrightarrow\; (u, w) = (\bar{u}, \bar{w}) \in \mathcal{CE}.$$

- Note que $((u, w), (\bar{u}, \bar{w})) \in \mathcal{SW}^{2M}$, la utilidad de los agentes del mismo tipo es la misma.

Core

- El Core es la solución más tradicional en juegos cooperativos y una de las más estudiadas.
- El Core corresponde a la noción de bloqueo que requiere que todos los miembros de la coalición rompan todos los intercambios asignados con los agentes fuera de la coalición y compren o vendan solo con miembros dentro de la coalición.
- La idea es que un vector de utilidades está en el Core si no existe una coalición que comercializando entre ellos y distribuyendo utilidades obtenga algo mejor que la distribución original.

Core

- Dado un mercado $M = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, V, d, R, Q)$ y una coalición $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ definimos un submercado

$$M^{\mathcal{C}} = (\mathcal{B}^{\mathcal{C}}, \mathcal{G}^{\mathcal{C}}, \mathcal{S}^{\mathcal{C}}, V^{\mathcal{C}}, d^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, Q^{\mathcal{C}})$$

  la restricción natural del mercado M a la coalición $\mathcal{C}$.

- Donde:

$$\mathcal{B}^{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{S}^{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$$

$$\mathcal{G}^{\mathcal{C}} = \{j \in \mathcal{G} \mid \exists k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}} \text{ tal que } q_{jk} > 0\}$$

$$V^{\mathcal{C}} = (v_{ij})_{(ij) \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{G}^{\mathcal{C}}} \qquad d^{\mathcal{C}} = (d_i)_{i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}},$$

$$R^{\mathcal{C}} = (r_{jk})_{(j,k) \in \mathcal{G}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} \qquad Q^{\mathcal{C}} = (q_{jk})_{(j,k) \in \mathcal{G}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}}.$$

Definición Una asignación factible A es *Core−compatible* con $\mathcal{C}$ si:

$$\forall A_{ijk} \neq 0 \Longrightarrow \{i, k\} \subset \mathcal{C}.$$

- Dada una asignación factible A consideremos la submatriz

$$A^{\mathcal{C}} = (A_{ijk})_{(i,j,k) \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{G}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}}$$

- Definimos:

$$T\left(A^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{ijk \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{G}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} \tau_{ijk} \cdot A_{ijk}.$$

$$\mathcal{F}^{\mathcal{C}} = \{A^{\mathcal{C}} \in \mathbb{Z}_{+}^{\mathcal{B}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{G}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} \mid T^{M^{\mathcal{C}}}(A^{\mathcal{C}}) \geq T^{M^{\mathcal{C}}}(\widehat{A}^{\mathcal{C}}) \ \forall \widehat{A}^{\mathcal{C}} \text{ factible } \}.$$

- Note que $A^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}^{\mathcal{C}}$, es la solución entera de un programa lineal.

Core

- Para definir un juego cooperativo v con utilidad transferible asociado a M. $\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ debemos definir su valor:
  - $v(\mathcal{C}) = T^{M^{\mathcal{C}}}(A^{\mathcal{C}})$,
  - Donde $A^{\mathcal{C}}$ es cualquier asignación óptima de $M^{\mathcal{C}}$.
- $(u, w) \in \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^S$ es factible si:

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} u_i + \sum_{k \in \mathcal{S}} w_k = v(\mathcal{B} \cup \mathcal{S}).$$

- $v(\mathcal{C})$ es la utilidad máxima que pueden obtener los agentes de la coalición $\mathcal{C}$.
- Note que $v(\mathcal{C})$ es el valor de una solución óptima de un programa lineal.

Core

Definición Un vector de utilidades $(u, w) \in \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^S$ está *Core−bloqueado por* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ si

$$\sum_{i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}} u_i + \sum_{k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}} w_k < v(\mathcal{C}).$$

Definición Un vector de utilidades $(u, w) \in \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^S$ pertenece al Core si no existe una coalición $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ tal que (u, w) esta Core−bloqueado por $\mathcal{C}$.

- Sea $\mathcal{C}o$ el conjunto de utilidades pertenecientes al Core.
- Luego

$$\varnothing \neq \mathcal{CE} \subseteq \mathcal{SW} \subseteq \mathcal{C}o.$$

  Estas inclusiones pueden ser estrictas.

Core

- Sea ρM la $\rho-$replica del mercado M replicado.
- Sea $\rho\mathcal{C}o$ el Core del mercado ρM.
- Dado un vector de utilidades $(u, w)^{\rho}$; notemos:

$$(u, w)^{\rho} \equiv (\underbrace{(u, w), ..., (u, w)}_{\rho-\text{times}})$$

Teorema (Massó-Neme) *Sea $\rho \geq 2$. Entonces,*

$$\rho\mathcal{C}o \subset \{(u, w)^{\rho} \in (\mathbb{R}^{m} \times \mathbb{R}^{t})^{\rho} \mid (u, w) \in \mathcal{C}o\}.$$

- Un vector de utilidades está en el $\rho\mathcal{C}o$, entonces la utilidad de los agentes del mismo tipo es la misma.

Teorema (Massó-Neme) Sea $(u, w) \in \mathbb{R}^{B} \times \mathbb{R}^{S}$ un vector de utilidades. *Entonces,*

$$\forall \rho \geq 2; \qquad (u, w)^{\rho} \in \rho\mathcal{C}o \;\Leftrightarrow (u, w) \in \mathcal{C}\mathcal{E}$$

- Las soluciones cooperativas se basan en la idea de que una coalición bloquea al vector de utilidades propuesto si todos los agentes de la coalición pueden mejorar sus pagos. Existen diferentes maneras en las cuales dicha coalición puede formarse.
- El Core requiere que todos los miembros de la coalición rompan sus intercambios con agentes de fuera de la coalición.
  - *(i)* $\forall i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$.
  - *(ii)* $\forall k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$.
- El Set-wise estables permite que los intercambios de un agente de la coalición mantengan o reduzcan los contratos con agentes fuera de la coalición. (los contratos son unidad por unidad).
  - *(i)* $\forall i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ijk} \leq A_{ijk}$.
  - *(ii)* $\forall k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ijk} \leq A_{ijk}$.

Proponemos dos nociones alternativas:

- Estabilidad por grupo 1: cuando los contratos se realizan bien por bien y por lo tanto un agente de la coalición puede mantener con un agente fuera de la coalición el intercambio de todas las unidades del bien o bien eliminarlas todas.
  - *(i)* $\forall i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ijk} = A_{ijk}$.
  - *(ii)* $\forall k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ijk} = A_{ijk}$.
- Estabilidad por grupo 2: cuando entre un comprador y un vendedor sólo existe un contrato de venta y por lo tanto un agente de la coalición puede mantener con un agente fuera de la coalición todos los intercambios o eliminarlos todos.
  - *(i)* $\forall i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ij'k} = A_{ij'k}$, $\forall j' \in \mathcal{G}$.
  - *(ii)* $\forall k \in \mathcal{S}^{\mathcal{C}}$, $\widehat{A}_{ijk} > 0 \Rightarrow i \in \mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ ó $\widehat{A}_{ij'k} = A_{ij'k}$, $\forall j' \in \mathcal{G}$.
- $\emptyset \neq \mathcal{CE} \subseteq \mathcal{SW} \subseteq \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{C}o$.

MUCHAS GRACIAS