Desigualdades mixtas con pesos para operadores fraccionarios multilineales

M. Belén Picardi

Universidad Nacional del Sur

7 de junio de 2019

En este trabajo presentamos un teorema que generaliza al contexto multilineal una desigualdad mixta con pesos de tipo Sawyer para el operador maximal fraccionario.

En este trabajo presentamos un teorema que generaliza al contexto multilineal una desigualdad mixta con pesos de tipo Sawyer para el operador maximal fraccionario.

Además, a partir de argumentos de extrapolación podemos extender nuestro resultado a la integral fraccionaria multilineal.

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

- $w \in A_1$ *si* $Mw(x) \leq C\, w(x)$
  Notamos: $[\mathbf{w}]_{\mathbf{A_1}}$ *a la mejor constante* C.

Definición

Sea $w(x)$ una función no negativa localmente integrable
Decimos que:

- $w \in A_1$ *si* $Mw(x) \leq C\, w(x)$
  Notamos: $[\mathbf{w}]_{\mathbf{A_1}}$ *a la mejor constante* C.
- $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, *si verifica:*

$$[\mathbf{w}]_{\mathbf{A_p}} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} < \infty$$

Clase A_∞

$$A_\infty = \cup_{1 \le p < \infty} A_p$$

Clase A_∞

$$A_\infty = \cup_{1\le p<\infty} A_p$$

En las estimaciones cuantitativas, donde las constantes son relevantes, suele usarse la constante A_∞ de Fujii-Wilson dada por

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q).$$

Definición ($A_{\vec{P}}$: Análogo de las clases A_p de Muckenhoupt para pesos múltiples)

Sean $1 \leq p_1, ..., p_m < \infty$, $\vec{P} = (p_1, ..., p_m)$, *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. *Dado* $\vec{w} = (w_1, ..., w_m)$, *sea*

$$\nu_{\vec{w}} = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\frac{p}{p_j}}$$

Definición ($A_{\vec{P}}$: Análogo de las clases A_p de Muckenhoupt para pesos múltiples)

Sean $1 \leq p_1, \dots, p_m < \infty$, $\vec{P} = (p_1, \dots, p_m)$, *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$. *Dado* $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$, *sea*

$$\nu_{\vec{w}} = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\frac{p}{p_j}}$$

Decimos que $\vec{w}$ *satisface la condición* $A_{\vec{P}}$ *si*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty$$

Definición ($A_{\vec{P}}$: Análogo de las clases A_p de Muckenhoupt para pesos múltiples)

Sean $1 \leq p_1, \dots, p_m < \infty$, $\vec{P} = (p_1, \dots, p_m)$, *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m}$. *Dado* $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$, *sea*

$$\nu_{\vec{w}} = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\frac{p}{p_j}}$$

Decimos que $\vec{w}$ *satisface la condición* $A_{\vec{P}}$ *si*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty$$

Cuando $p_j = 1$, $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}}$ *se entiende como* $(\inf_Q w_j)^{-1}$.

Definición ($A_{\vec{P}}$: Análogo de las clases A_p de Muckenhoupt para pesos múltiples)

Sean $1 \leq p_1, \ldots, p_m < \infty$, $\vec{P} = (p_1, \ldots, p_m)$, *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m}$. *Dado* $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_m)$, *sea*

$$\nu_{\vec{w}} = \prod_{j=1}^{m} w_j^{\frac{p}{p_j}}$$

Decimos que $\vec{w}$ *satisface la condición* $A_{\vec{P}}$ *si*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}} < \infty$$

Cuando $p_j = 1$, $\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{1-p_j'} \right)^{\frac{1}{p_j'}}$ *se entiende como* $(\inf_Q w_j)^{-1}$.

Por lo tanto diremos que $\vec{w} \in A_{(1,\ldots,1)}$ *si*

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \nu_{\vec{w}} \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{m} (\inf_Q w_j)^{-1} < \infty$$

Recordemos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, w(\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$$

Recordemos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$$

Función maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen al punto x.

Recordemos que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$$

Función maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen al punto x.

Teorema (Sawyer, 1985)

Sean $u, v \in A_1$. Existe una constante C tal que para todo $t > 0$,

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{M(fv)(x)}{v(x)} \ > t\right\}\right) \le \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| u(x) v(x)\, dx$$

En 2009 Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González introdujeron en su trabajo la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$

En 2009 Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González introdujeron en su trabajo la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$

Definición

Dada $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ *se define el operador maximal* $\mathcal{M}$ *como*

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{x\in Q} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q *que contienen a* x*.*

En 2009 Lerner, Ombrosi, Pérez, Torres y Trujillo-González introdujeron en su trabajo la función (sub)multilineal maximal $\mathcal{M}$

Definición

Dada $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ se define el operador maximal $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M}(\vec{f})(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

Este operador maximal es mas pequeño que el operador producto

$$\prod_{j=1}^{m} M(f_j),$$

que hasta ese momento era el operador auxiliar utilizado para estimar operadores integrales singulares multilineales.

Recordamos la definición de la integral fraccionaria o potencial de Riesz

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \quad 0 < \alpha < n,$$

Recordamos la definición de la integral fraccionaria o potencial de Riesz

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \;\; 0 < \alpha < n,$$

y del operador maximal fraccionario

$$M_\alpha f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy, \;\; 0 \leq \alpha < n,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

Recordamos la definición de la integral fraccionaria o potencial de Riesz

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \quad 0 < \alpha < n,$$

y del operador maximal fraccionario

$$M_\alpha f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(y)| dy, \quad 0 \leq \alpha < n,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos Q que contienen a x.

Notemos que en el caso $\alpha = 0$ recuperamos la función maximal de Hardy-Littlewood.

F. Berra, M. Carena y G. Pradolini probaron la siguiente desigualdad mixta de tipo débil:

F. Berra, M. Carena y G. Pradolini probaron la siguiente desigualdad mixta de tipo débil:

Teorema (Berra, Carena y Pradolini)

Sea $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ y q tal que satisface $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si u, v son pesos tales que $u, v^{\frac{q}{p}} \in A_1$ o $uv^{\frac{-q}{p'}} \in A_1$ y $v \in A_\infty(uv^{\frac{-q}{p'}})$, entonces existe una constante positiva C tal que para todo $t > 0$

$$uv^{\frac{q}{p}}\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{I_\alpha(fv)(x)}{v(x)} > t\right\}^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p u(x)^{\frac{p}{q}} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde I_α es la integral fraccionaria o la función maximal fraccionaria.

En el contexto multilineal, una manera natural de extender las integrales fraccionarias es la siguiente:

En el contexto multilineal, una manera natural de extender las integrales fraccionarias es la siguiente:

Definición

Sea α un número tal que $0 < \alpha < mn$ y sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$ una colección de funciones en $\mathbb{R}^n$. Definimos la integral fraccionaria multilineal como

$$\mathcal{I}_\alpha \vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1)...f_m(y_m)\ d\vec{y}}{(|x - y_1| + ... + |x - y_m|)^{mn-\alpha}}.$$

En 2009 K. Moen introdujo el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ asociado a la integral fraccionaria multilineal $\mathcal{I}_\alpha$.

En 2009 K. Moen introdujo el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ asociado a la integral fraccionaria multilineal $\mathcal{I}_\alpha$.

Definición

Para $0 \leq \alpha < mn$ *y* $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$, *definimos el operador maximal (sub)multilineal* $\mathcal{M}_\alpha$ *como*

$$\mathcal{M}_\alpha \vec{f}(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{nm}}} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i \right)$$

En 2009 K. Moen introdujo el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ asociado a la integral fraccionaria multilineal $\mathcal{I}_\alpha$.

Definición

Para $0 \leq \alpha < mn$ y $\vec{f} = (f_1, ..., f_m)$, definimos el operador maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}_\alpha$ como

$$\mathcal{M}_\alpha \vec{f}(x) = \sup_{x \in Q} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{|Q|^{1-\frac{\alpha}{nm}}} \int_Q |f_i(y_i)| dy_i \right)$$

Observemos que el caso $\alpha = 0$ corresponde a la función maximal (sub)multilineal $\mathcal{M}$.

Nosotros probamos el siguiente teorema:

Nosotros probamos el siguiente teorema:

Teorema

Sea $0 < \alpha < mn$. *Sean* $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq})$ *y* $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. *Supongamos que* $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,\ldots,1)}$ *y* $\nu v^q \in A_\infty$, *o* $u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq} \in A_1$ *y* $v^{mq} \in A_\infty$, *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})(x)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

Para probar nuestro teorema, primero generalizamos al contexto multilineal para $\mathcal{M}_\alpha$ el resultado de Berra, Carena y Pradolini:

Para probar nuestro teorema, primero generalizamos al contexto multilineal para $\mathcal{M}_\alpha$ el resultado de Berra, Carena y Pradolini:

Teorema

Sea $0 \leq \alpha < mn$. Sean $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, \dots, u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,\dots,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, \dots, u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$, entonces existe una constante C tal que

$$\left\| \frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})(x)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

Para su demostración fue necesario hallar la siguiente estimación puntual para $\mathcal{M}_\alpha$ en términos del operador multilineal maximal $\mathcal{M}$.

Para su demostración fue necesario hallar la siguiente estimación puntual para $\mathcal{M}_\alpha$ en términos del operador multilineal maximal $\mathcal{M}$.

Lema

Sea $q = \frac{n}{mn-\alpha}$. *Entonces*

$$\mathcal{M}_\alpha(f_1, \ldots, f_m)(x) \leq \mathcal{M}\left(f_1 u_1^{1-mq}, \ldots, f_m u_m^{1-mq}\right)^{\frac{1}{mq}}(x) \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_i u_i \right)^{\frac{\alpha}{mn}}$$

En segundo lugar, extendimos el resultado a la integral fraccionaria multilineal.

En segundo lugar, extendimos el resultado a la integral fraccionaria multilineal.

K. Moen probó que:

Teorema (Moen)

Sea $0 < \alpha < mn$. Entonces para cada $w \in A_\infty$ y todo $0 < q < \infty$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{I}_\alpha \vec{f}(x)|^q w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_\alpha \vec{f}(x)^q w(x)dx$$

para toda $\vec{f}$ con f_i acotada de soporte compacto.

Además, tenemos el siguiente teorema debido a Cruz-Uribe, Martell y Pérez:

Además, tenemos el siguiente teorema debido a Cruz-Uribe, Martell y Pérez:

Teorema (Cruz-Uribe, Martell y Pérez, 2005)

Dada una familia $\mathcal{F}$, Si para algún $0 < p < \infty$ y todo $w \in A_\infty$ se verifica que

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq C\|g\|_{L^p(w)},$$

entonces para todo $u \in A_1$ y todo $v \in A_\infty$ se cumple que

$$\|fv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)} \leq C\|gv^{-1}\|_{L^{1,\infty}(uv)}$$

Utilizando estos dos resultados probamos que:

Utilizando estos dos resultados probamos que:

Teorema

Sean $0 < \alpha < mn$ *y* $q = \frac{n}{mn-\alpha}$. *Sean* $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq}) \in A_{(1,\ldots,1)}$, $v^q \in A_\infty$ *y denotamos* $\nu = \prod_{i=1}^{m} u_i^q$. *Entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})(x)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \left\| \frac{\mathcal{M}_\alpha(\vec{f})(x)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)}$$

Con lo que finalmente tenemos el resultado principal de este trabajo que habíamos enunciado anteriormente:

Con lo que finalmente tenemos el resultado principal de este trabajo que habíamos enunciado anteriormente:

Teorema

Sea $0 < \alpha < mn$. *Sean* $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, \dots, u_m^{mq})$ *y* $\nu = \prod_{i=1}^{m} u_i^q$. *Supongamos que* $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,\dots,1)}$ *y* $\nu v^q \in A_\infty$, *o* $u_1^{mq}, \dots, u_m^{mq} \in A_1$ *y* $v^{mq} \in A_\infty$, *entonces existe una constante* C *tal que*

$$\left\| \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})(x)}{v} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^1(u_i)}.$$

Teorema (Carando, Mazzitelli y Ombrosi)

Sea $0 < p, q_1, \ldots, q_m < r < 2$ o $r = 2$ y $0 < p, q_1, \ldots, q_m < \infty$ y, para cada $1 \le i \le m$, consideremos $\{f^i_{k_i}\}_{k_i} \subset L^{q_i}(\mu_i)$. Y sea S un operador multilineal tal que $S\colon L^{q_1}(\mu_1) \times \cdots \times L^{q_m}(\mu_m) \to L^{p,\infty}(\nu)$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(\sum_{k_1,\ldots,k_m} |S(f^1_{k_1}, \ldots, f^m_{k_m})|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{p,\infty}(\nu)} \le C\|S\|_{weak} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(\sum_{k_i} |f^i_{k_i}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q_i}(\mu_i)}.$$

Como consecuencia de este teorema y el nuestro, obtenemos la siguiente desigualdad mixta vectorial para un operador multilineal fraccionario $\mathcal{I}_\alpha$:

Como consecuencia de este teorema y el nuestro, obtenemos la siguiente desigualdad mixta vectorial para un operador multilineal fraccionario $\mathcal{I}_\alpha$:

Corolario

Sea $S(\vec{f}) = \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})}{v}$, donde $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador multilineal fraccionario. Sea $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,\ldots,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$. Para cada $1 \leq i \leq m$, consideramos $\{f_{k_i}^i\}_{k_i} \subset L^1(u_i)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(\sum_{k_1,\ldots,k_m} |S(f_{k_1}^1, \ldots, f_{k_m}^m)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \left\| \left(\sum_{k_i} |f_{k_i}^i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^1(u_i)}.$$

Como consecuencia de este teorema y el nuestro, obtenemos la siguiente desigualdad mixta vectorial para un operador multilineal fraccionario $\mathcal{I}_\alpha$:

Corolario

Sea $S(\vec{f}) = \frac{\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})}{v}$, donde $\mathcal{I}_\alpha$ es un operador multilineal fraccionario. Sea $q = \frac{n}{mn-\alpha}$, $\vec{u}^{mq} = (u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq})$ y $\nu = \prod_{i=1}^m u_i^q$. Supongamos que $\vec{u}^{mq} \in A_{(1,\ldots,1)}$ y $\nu v^q \in A_\infty$, o $u_1^{mq}, \ldots, u_m^{mq} \in A_1$ y $v^{mq} \in A_\infty$. Para cada $1 \leq i \leq m$, consideramos $\{f_{k_i}^i\}_{k_i} \subset L^1(u_i)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \left(\sum_{k_1,\ldots,k_m} |S(f_{k_1}^1, \ldots, f_{k_m}^m)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^{q,\infty}(\nu v^q)} \leq C \prod_{i=1}^m \left\| \left(\sum_{k_i} |f_{k_i}^i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^1(u_i)}.$$

Observemos que bajo estas hipótesis, S satisface $S\colon L^1(u_1) \times \cdots \times L^1(u_m) \to L^{q,\infty}(\nu v^q)$. Luego estamos bajo las hipótesis del teorema anterior.