Estimaciones con pesos A_1 matriciales

Israel P. Rivera-Ríos
Universidad Nacional del Sur - INMABB

XV Congreso Antonio Monteiro

Outline

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideramos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos

$$Tf(x) = \sum_{i=1}^{n} T(e_i|f)e_i.$$

- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes e_i \qquad \text{donde } e_i \otimes e_i = e_i(e_i|\cdot).$$

Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi(t)$ definimos

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i)e_i \otimes e_i.$$

Estas matrices también son autoadjuntas. En el caso $\phi(t) = t^{-1}$ coincide con la inversa usual.

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideramos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos

$$Tf(x) = \sum_{i=1}^n T(e_i|f)e_i.$$

- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i \qquad \text{donde } e_i \otimes e_i = e_i(e_i|\cdot).$$

Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi(t)$ definimos

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^n \phi(\lambda_i)e_i \otimes e_i.$$

Estas matrices también son autoadjuntas. En el caso $\phi(t) = t^{-1}$ coincide con la inversa usual.

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideramos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ definimos

$$Tf(x)=\sum_{i=1}^n T(e_i|f)e_i.$$

- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i>0$ tales que

$$A=\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\otimes e_i \qquad \text{donde } e_i\otimes e_i=e_i(e_i|\cdot).$$

Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi(t)$ definimos

$$\phi(A)=\sum_{i=1}^n \phi(\lambda_i)e_i\otimes e_i.$$

Estas matrices también son autoadjuntas. En el caso $\phi(t)=t^{-1}$ coincide con la inversa usual.

Extensiones vectoriales

Objetivo

Queremos extender operadores escalares para que actúen sobre funciones $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, así como estudiar una teoría de pesos adecuada a dichos operadores.

- Consideramos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Dado un operador lineal T y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definimos

$$Tf(x) = \sum_{i=1}^{n} T(e_i|f)e_i.$$

- Recordamos que si A es una matriz autoadjunta, definida positiva, siempre podemos diagonalizarla, de manera que podemos encontrar una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de autovectores y autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ con $\lambda_i > 0$ tales que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes e_i \qquad \text{donde } e_i \otimes e_i = e_i(e_i|\cdot).$$

  Teniendo en cuenta esto, es posible definir un cálculo funcional de la siguiente forma. Dada una función inyectiva $\phi(t)$ definimos

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i)e_i \otimes e_i.$$

  Estas matrices también son autoadjuntas. En el caso $\phi(t) = t^{-1}$ coincide con la inversa usual.

Pesos matriciales

Definición

Llamaremos peso matricial a toda funición matricial $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta, definida positiva a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

- Recordamos que en el caso escalar $f \in L^p(w)$ si

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |w^{\frac{1}{p}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si W es un peso matricial diremos que $f \in L^p(W)$ si

$$\|f\|_{L^p(W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |W^{\frac{1}{p}}(x) f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pesos matriciales

Definición

Llamaremos peso matricial a toda funición matricial $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta, definida positiva a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

- Recordamos que en el caso escalar $f \in L^p(w)$ si

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |w^{\frac{1}{p}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si W es un peso matricial diremos que $f \in L^p(W)$ si

$$\|f\|_{L^p(W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |W^{\frac{1}{p}}(x) f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pesos matriciales

Definición

Llamaremos peso matricial a toda funición matricial $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta, definida positiva a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

- Recordamos que en el caso escalar $f \in L^p(w)$ si

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |w^{\frac{1}{p}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Si W es un peso matricial diremos que $f \in L^p(W)$ si

$$\|f\|_{L^p(W)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |W^{\frac{1}{p}}(x) f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\text{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|W(y) W^{-1}(z)\|_{\text{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}}\right)^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y)\right\|_{op}^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |w(y)|w^{-1}(z)dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{op}dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{op}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \| W(y) W^{-1}(z) \|_{op} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|W(y) W^{-1}(z)\|_{\mathrm{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}} \right)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) \right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname{ess\,sup}_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|W(y) W^{-1}(z)\|_{\mathrm{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\Longleftrightarrow [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\Longleftrightarrow [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}}\right)^{p'}dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

  lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y)\right\|_{\text{op}}^{p'}dy\right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |w(y)| w^{-1}(z) dy < \infty$$

  lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{\text{op}} dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Pesos A_p

- Recordamos que $w \in A_p$ $(1 < p < \infty)$ si

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{\frac{p'}{p}} w(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

$$\iff [w]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(w(x)^{\frac{1}{p}} w(y)^{-\frac{1}{p}}\right)^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} dx < \infty$$

lo que motiva definir

$$[W]_{A_p} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \left\|W^{\frac{1}{p}}(x)W^{-\frac{1}{p}}(y)\right\|_{\mathrm{op}}^{p'} dy\right)^{\frac{p}{p'}} < \infty$$

- En el caso $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |w(y)|w^{-1}(z)dy < \infty$$

lo que nos lleva a definir

$$[W]_{A_1} = \sup_Q \operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|W(y)W^{-1}(z)\|_{\mathrm{op}}dy < \infty$$

- Esta forma de expresar los pesos que acabamos de ver se debe a Roudenko y Frazier.

Más sobre pesos A_p

Si G es un operador lineal,

$$\|G(f)\|_{L^p(W)} \leq c_{T,W} \|f\|_{L^p(W)} \iff \left\| W^{\frac{1}{p}} G\left(W^{-\frac{1}{p}} f\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)} \leq c_{T,W} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}$$

Teorema (Goldberg-Christ / Goldberg / Isralowitz - Kwon - Pott)

Sea $1 < p < \infty$ y

$$M_{W,p} f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) f(y) \right| dy.$$

$$W \in A_p \iff \|M_{W,p} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d,p} [W]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema (Treil - Volberg / Goldberg / Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen)

Si $W \in A_p$ y T es un operador de Calderón Zygmund,

$$\|Tf\|_{L^p(W)} \leq c_{n,d,T,p} [W]_{A_p}^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(W)}.$$

Si $p = 2$ y T es la transformada de Hilbert entonces se verifica también el recíproco.

El teorema A_2 es un problema abierto en el caso matricial.

Más sobre pesos A_p

Si G es un operador lineal,

$$\|G(f)\|_{L^p(W)} \leq c_{T,W} \|f\|_{L^p(W)} \iff \left\|W^{\frac{1}{p}} G\left(W^{-\frac{1}{p}} f\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)} \leq c_{T,W} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}$$

Teorema (Goldberg-Christ / Goldberg / Isralowitz - Kwon - Pott)

Sea $1 < p < \infty$ *y*

$$M_{W,p} f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) f(y) \right| dy.$$

$$W \in A_p \iff \|M_{W,p} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d,p} [W]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema (Treil - Volberg / Goldberg / Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen)

Si $W \in A_p$ *y* T *es un operador de Calderón Zygmund,*

$$\|Tf\|_{L^p(W)} \leq c_{n,d,T,p} [W]_{A_p}^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(W)}.$$

Si $p = 2$ *y* T *es la transformada de Hilbert entonces se verifica también el recíproco.*

El teorema A_2 es un problema abierto en el caso matricial.

Más sobre pesos A_p

Si G es un operador lineal,

$$\|G(f)\|_{L^p(W)} \leq c_{T,W}\|f\|_{L^p(W)} \iff \left\|W^{\frac{1}{p}}G\left(W^{-\frac{1}{p}}f\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)} \leq c_{T,W}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}$$

Teorema (Goldberg-Christ / Goldberg / Isralowitz - Kwon - Pott)

Sea $1<p<\infty$ *y*

$$M_{W,p}f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W^{\frac{1}{p}}(x)W^{-\frac{1}{p}}(y)f(y)\right|dy.$$

$$W\in A_p \iff \|M_{W,p}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d,p}[W]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema (Treil - Volberg / Goldberg / Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen)

Si $W\in A_p$ *y* T *es un operador de Calderón Zygmund,*

$$\|Tf\|_{L^p(W)} \leq c_{n,d,T,p}[W]_{A_p}^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{p-1}}\|f\|_{L^p(W)}.$$

Si $p=2$ *y* T *es la transformada de Hilbert entonces se verifica también el recíproco.*

El teorema A_2 es un problema abierto en el caso matricial.

Más sobre pesos A_p

Si G es un operador lineal,

$$\|G(f)\|_{L^p(W)} \leq c_{T,W} \|f\|_{L^p(W)} \iff \left\| W^{\frac{1}{p}} G\left(W^{-\frac{1}{p}} f\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)} \leq c_{T,W} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}$$

Teorema (Goldberg-Christ / Goldberg / Isralowitz - Kwon - Pott)

Sea $1 < p < \infty$ *y*

$$M_{W,p} f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) f(y)\right| dy.$$

$$W \in A_p \iff \|M_{W,p} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d,p} [W]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema (Treil - Volberg / Goldberg / Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg / Cruz-Uribe - Isralowitz - Moen)

Si $W \in A_p$ *y* T *es un operador de Calderón Zygmund,*

$$\|Tf\|_{L^p(W)} \leq c_{n,d,T,p} [W]_{A_p}^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p-1}} \|f\|_{L^p(W)}.$$

Si $p = 2$ *y* T *es la transformada de Hilbert entonces se verifica también el recíproco.*

El teorema A_2 es un problema abierto en el caso matricial.

Outline

Estimaciones A_1 de tipo fuerte

Si asumimos que $w \in A_1$ entonces la dependencia en la constante del peso debería ser mejor que en el caso $w \in A_p$.

Teorema

Sea $w \in A_1$ y $1 < p < \infty$.

(Fefferman - Stein)

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Lerner - Ombrosi - Pérez) T es un operador de Calderón-Zygmund

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Ortiz-Caraballo) T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$

$$\|[b,T]f\|_{L^p(w)} \lesssim \|b\|_{BMO}[w]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(w)}$$

donde el conmutador $[b,T]$ viene dado por

$$[b,T]f(x) = bTf(x) - T(bf)(x).$$

Estimaciones A_1 de tipo fuerte

Si asumimos que $w \in A_1$ entonces la dependencia en la constante del peso debería ser mejor que en el caso $w \in A_p$.

Teorema

Sea $w \in A_1$ y $1 < p < \infty$.

(Fefferman - Stein)

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Lerner - Ombrosi - Pérez) T es un operador de Calderón-Zygmund

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Ortiz-Caraballo) T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$

$$\|[b, T]f\|_{L^p(w)} \lesssim \|b\|_{BMO} [w]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(w)}$$

donde el conmutador $[b, T]$ viene dado por

$$[b, T]f(x) = bTf(x) - T(bf)(x).$$

Estimaciones A_1 de tipo fuerte

Si asumimos que $w \in A_1$ entonces la dependencia en la constante del peso debería ser mejor que en el caso $w \in A_p$.

Teorema

Sea $w \in A_1$ y $1 < p < \infty$.

(Fefferman - Stein)

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Lerner - Ombrosi - Pérez) T es un operador de Calderón-Zygmund

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Ortiz-Caraballo) T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$

$$\|[b,T]f\|_{L^p(w)} \lesssim \|b\|_{BMO} [w]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(w)}$$

donde el conmutador $[b,T]$ viene dado por

$$[b,T]f(x) = bTf(x) - T(bf)(x).$$

Estimaciones A_1 de tipo fuerte

Si asumimos que $w \in A_1$ entonces la dependencia en la constante del peso debería ser mejor que en el caso $w \in A_p$.

Teorema

Sea $w \in A_1$ y $1 < p < \infty$.

(Fefferman - Stein)

$$\|Mf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Lerner - Ombrosi - Pérez) T es un operador de Calderón-Zygmund

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_1} \|f\|_{L^p(w)}.$$

(Ortiz-Caraballo) T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$

$$\|[b,T]f\|_{L^p(w)} \lesssim \|b\|_{BMO} [w]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(w)}$$

donde el conmutador $[b,T]$ viene dado por

$$[b,T]f(x) = bTf(x) - T(bf)(x).$$

Estimaciones A_1 de tipo fuerte.

Teorema (Isralowitz, Pott, R-R)

Sean $W \in A_1$ *y* $1 < p < \infty$. *Entonces:*

- *Si*

$$M_{W,p}f(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) f(y) \right| dy$$

  entonces

$$\|M_{W,p}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d} [W]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$

- *Si* T *un operador de Calderón-Zygmund*

$$\|Tf\|_{L^p(W)} \lesssim [W]_{A_1} \|f\|_{L^p(W)}.$$

- *Si* T *un operador de Calderón-Zygmund y* $b \in BMO$,

$$\|[b,T]f\|_{L^p(W)} \lesssim \|b\|_{BMO} [W]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(W)}.$$

Estimaciones A_1 de tipo fuerte.

Teorema (Isralowitz, Pott, R-R)

Sean $W \in A_1$ y $1 < p < \infty$. Entonces:

- *Si*
$$M_{W,p}f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) f(y) \right| dy$$
entonces
$$\|M_{W,p}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d} [W]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$
- *Si T un operador de Calderón-Zygmund*
$$\|Tf\|_{L^p(W)} \lesssim [W]_{A_1} \|f\|_{L^p(W)}.$$
- *Si T un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$,*
$$\|[b,T]f\|_{L^p(W)} \lesssim \|b\|_{BMO} [W]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(W)}.$$

Estimaciones A_1 de tipo fuerte.

Teorema (Isralowitz, Pott, R-R)

Sean $W \in A_1$ y $1 < p < \infty$. Entonces:

- *Si*

$$M_{W,p}f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| W^{\frac{1}{p}}(x) W^{-\frac{1}{p}}(y) f(y) \right| dy$$

  entonces

$$\|M_{W,p}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_{n,d} [W]_{A_1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d)}.$$

- *Si T un operador de Calderón-Zygmund*

$$\|Tf\|_{L^p(W)} \lesssim [W]_{A_1} \|f\|_{L^p(W)}.$$

- *Si T un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$,*

$$\|[b,T]f\|_{L^p(W)} \lesssim \|b\|_{BMO} [W]_{A_1}^2 \|f\|_{L^p(W)}.$$

Algunas ideas de las pruebas

Ideas de la prueba

- A día de hoy no se conoce una «máquina» de fabricar pesos A_1 en el contexto matricial análoga al algoritmo de Rubio de Francia en el caso escalar.
- Se emplea una combinación de bumps y resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ es una función tal que $|f| \in L^\infty_c$, existen 3^d familias sparse $\mathscr{S}_j$ tales que

$$Tf(x) = c_{n,d,T} \sum_{j=1}^{3^d} \sum_{Q\in\mathscr{S}_j} \frac{1}{|Q|} \int_Q k_Q(x,y) f(y) dy \chi_Q(x)$$

donde las funciones $k_Q(x,y)$ son medibles en (x,y) soportadas en Q y con $\|k_Q\|_{L^\infty} \leq 1$.

En el caso en del conmutador obtenemos un resultado de dominación similar.

Algunas ideas de las pruebas

Ideas de la prueba

- A día de hoy no se conoce una «máquina» de fabricar pesos A_1 en el contexto matricial análoga al algoritmo de Rubio de Francia en el caso escalar.
- Se emplea una combinación de bumps y resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ es una función tal que $|f| \in L^\infty_c$, existen 3^d familias sparse $\mathscr{S}_j$ tales que

$$Tf(x) = c_{n,d,T} \sum_{j=1}^{3^d} \sum_{Q \in \mathscr{S}_j} \frac{1}{|Q|} \int_Q k_Q(x,y) f(y) dy \chi_Q(x)$$

donde las funciones $k_Q(x,y)$ son medibles en (x,y) soportadas en Q y con $\|k_Q\|_{L^\infty} \leq 1$.

En el caso en del conmutador obtenemos un resultado de dominación similar.

Algunas ideas de las pruebas

Ideas de la prueba

- A día de hoy no se conoce una «máquina» de fabricar pesos A_1 en el contexto matricial análoga al algoritmo de Rubio de Francia en el caso escalar.
- Se emplea una combinación de bumps y resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ es una función tal que $|f| \in L^\infty_c$, existen 3^d familias sparse $\mathscr{S}_j$ tales que

$$Tf(x) = c_{n,d,T} \sum_{j=1}^{3^d} \sum_{Q \in \mathscr{S}_j} \frac{1}{|Q|} \int_Q k_Q(x,y) f(y) dy \chi_Q(x)$$

donde las funciones $k_Q(x,y)$ son medibles en (x,y) soportadas en Q y con $\|k_Q\|_{L^\infty} \leq 1$.

En el caso en del conmutador obtenemos un resultado de dominación similar.

Algunas ideas de las pruebas

Ideas de la prueba

- A día de hoy no se conoce una «máquina» de fabricar pesos A_1 en el contexto matricial análoga al algoritmo de Rubio de Francia en el caso escalar.
- Se emplea una combinación de bumps y resultados análogos a la dominación sparse (Convex Body domination).

Teorema (Nazarov - Petermichl - Treil - Volberg)

Si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ es una función tal que $|f|\in L^\infty_c$, existen 3^d familias sparse $\mathscr{S}_j$ tales que

$$Tf(x)=c_{n,d,T}\sum_{j=1}^{3^d}\sum_{Q\in\mathscr{S}_j}\frac{1}{|Q|}\int_Q k_Q(x,y)f(y)dy\chi_Q(x)$$

donde las funciones $k_Q(x,y)$ son medibles en (x,y) soportadas en Q y con $\|k_Q\|_{L^\infty}\le 1$.

En el caso en del conmutador obtenemos un resultado de dominación similar.

Outline

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |Gf(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} w(x) dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|W(x) G\left(W^{-1} f\right)(x)\right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x) G\left(W^{-1} f\right)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

Observación

- Este tipo de desigualdades han sido estudiadas desde hace años en el caso escalar. Para más detalles consultar a Sheldy Ombrosi, Belen Picardi o Jorgelina Recchi.
- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Carena, Berra, Pradolini, Li.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |Gf(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

Observación

- Este tipo de desigualdades han sido estudiadas desde hace años en el caso escalar. Para más detalles consultar a Sheldy Ombrosi, Belen Picardi o Jorgelina Recchi.
- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Carena, Berra, Pradolini, Li.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |Gf(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

Observación

- Este tipo de desigualdades han sido estudiadas desde hace años en el caso escalar. Para más detalles consultar a Sheldy Ombrosi, Belen Picardi o Jorgelina Recchi.
- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Carena, Berra, Pradolini, Li.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x\in\mathbb{R}^d : |Gf(x)|>t\right\}\right)\leq c_{G,w}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)|}{t}w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right|dx\leq c_{G,W}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right|>t\right\}\right|\leq c_{G,W}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)|}{t}dx.$$

Observación

- Este tipo de desigualdades han sido estudiadas desde hace años en el caso escalar. Para más detalles consultar a Sheldy Ombrosi, Belen Picardi o Jorgelina Recchi.
- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Carena, Berra, Pradolini, Li.

¿Qué estimaciones estudiar?

En el caso escalar las estimaciones pesadas en el extremo tienen la siguiente forma. Dado un operador G, es de tipo débil $(1,1)$ si

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : |Gf(x)| > t\right\}\right) \leq c_{G,w} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} w(x)dx.$$

Si considerásemos el tipo fuerte $(1,1)$ la estimación sería equivalente a la siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right| dx \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx.$$

Esto motiva el plantearse el estudio de las siguientes desigualdades

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)G\left(W^{-1}f\right)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{G,W} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

Observación

- Este tipo de desigualdades han sido estudiadas desde hace años en el caso escalar. Para más detalles consultar a Sheldy Ombrosi, Belen Picardi o Jorgelina Recchi.
- Autores con trabajos en esa dirección: Muckenhoupt, Wheeden, Sawyer, Cruz-Uribe, Martell, Pérez, Carena, Berra, Pradolini, Li.

Estimaciones en el extremo

Teorema (Cruz-Uribe, Isralowitz, Moen, Pott, R-R)

Si $W \in A_1$, entonces

- *Si* $M_{W,1}f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W(x)W^{-1}(y)f(y)\right| dy$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|M_{W,1}f(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador de Calderón-Zygmund*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)T(W^{-1}f)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$ entonces*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)[b,T](W^{-1}f)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}\|b\|_{BMO}[W]_{A_1}^3 \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx$$

donde $\Phi(t) = t\log(e+t)$.

Estimaciones en el extremo

Teorema (Cruz-Uribe, Isralowitz, Moen, Pott, R-R)

Si $W \in A_1$, entonces

- *Si* $M_{W,1}f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W(x)W^{-1}(y)f(y)\right| dy$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |M_{W,1}f(x)| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador de Calderón-Zygmund*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |W(x)T(W^{-1}f)(x)| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}[W]_{A_1}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$ entonces*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : |W(x)[b,T](W^{-1}f)(x)| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}\|b\|_{BMO}[W]_{A_1}^3 \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx$$

donde $\Phi(t) = t\log(e+t)$.

Estimaciones en el extremo

Teorema (Cruz-Uribe, Isralowitz, Moen, Pott, R-R)

Si $W \in A_1$, entonces

- *Si* $M_{W,1}f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|W(x)W^{-1}(y)f(y)\right| dy$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|M_{W,1}f(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d}[W]^2_{A_1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador de Calderón-Zygmund*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)T(W^{-1}f)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}[W]^2_{A_1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{t} dx.$$

- *Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $b \in BMO$ entonces*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|W(x)[b,T](W^{-1}f)(x)\right| > t\right\}\right| \leq c_{n,d,T}\|b\|_{BMO}[W]^3_{A_1} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx$$

donde $\Phi(t) = t\log(e+t)$.

THANK
YOU
GRACIAS
ARIGATO
SHUKURIA
DANKSCHEEN
GRÀCIES
SPASSIBO
SNACHALHUYA
NUHUN
CHALTU
TASHAKKUR ATU
YAQHANYELAY
YUSPAGARÄTAM
KIITOS
TINGKI
BIYAN
SHUKRIA
TACK
WABEEJA
MAITEKA
HUI
SUKSAMA
EKHMET
DHANYABAAD
ANIHA
ATTO
MERSI
SPASIBO
DENKAUJA
NENACHALHYA
UNALCHÉÉSH
GUI
HATUR
EKOJU
SIKOMO
GRAZAS
MAKETAI
MEHRBANI
GRAZIE
MAAKE
KOMAPSUMNIDA
SANCO
MERASTAWHY
GAEJTHO
LAH
TAVTAPUCH
MEDAWAGSE
GOZAIMASHITA
EFCHARISTO
AGUYJE
FAKAAUE
BAIIKA
JUSPAXAR
ESKERRIK ASKO
PALDIES
BOLZÏN
MERCI
MINMONCHAR