Acotaciones con pesos para los conmutadores de integrales singulares y operadores de tipo fraccionario

Gladis Pradolini - Jorgelina Recchi

Dpto de Matemática FIQ (UNL) - Dpto de Matemática (UNS)

7 de junio de 2019

Sea T un ***operador integral singular*** *con núcleo K esto es,* *Sea T un **operador integral singular** con núcleo K esto es,un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y representado de la forma*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \qquad \forall x \notin sop(f),$$

donde K verifica ciertas condiciones...

Sea T un ***operador integral singular*** *con núcleo K esto es,un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y representado de la forma*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \qquad \forall x \notin sop(f),$$

donde K verifica ciertas condiciones...

Condición de tamaño: S_0^*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n} \qquad x \neq y.$$

Sea T un ***operador integral singular*** *con núcleo K esto es,un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y representado de la forma*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy \qquad \forall x \notin sop(f),$$

donde K verifica ciertas condiciones...

Condición de tamaño: S_0^*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n} \qquad x \neq y.$$

Condición de Suavidad: $H_{0,\infty}^*$

$$|K_\alpha(x,y) - K_\alpha(x',y)| + |K_\alpha(y,x) - K_\alpha(y,x')| \leq C\frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n+\eta}},$$

donde $|x-y| \geq 2|x-x'|$ y para $0 < \eta \leq 1$.

Ejemplo

La transformada de Hilbert: $Hf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$, *tiene su núcleo en* $S_0^* \cap H_{0,\infty}^*$.

Ejemplo

La transformada de Hilbert: $Hf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$, *tiene su núcleo en* $S_0^* \cap H_{0,\infty}^*$.

Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *definimos el* ***conmutador*** *de* T *con símbolo* b,

$$[b, T]f = bTf - T(bf)$$

Ejemplo

La transformada de Hilbert: $Hf(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$, *tiene su núcleo en* $S_0^* \cap H_{0,\infty}^*$.

Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *definimos el* ***conmutador*** *de* T *con símbolo* b,

$$[b, T]f = bTf - T(bf)$$

y el ***conmutador de orden*** $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *de* T,

$$T_b^0 = T, \quad T_b^m = [b, T_b^{m-1}].$$

*Definimos **el operador fraccionario** T_α, con $0 < \alpha < n$,*

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x, y) f(y) dy,$$

donde K_α verifica ciertas condiciones de tamaño y suavidad.

Definimos ***el operador fraccionario*** T_α, *con* $0 < \alpha < n$,

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x,y) f(y) dy,$$

donde K_α *verifica ciertas condiciones de tamaño y suavidad.*

Condición de tamaño: S^*_α

$$|K_\alpha(x,y)| \leq \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Definimos ***el operador fraccionario*** T_α*, con* $0 < \alpha < n$*,*

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x,y) f(y) dy,$$

donde K_α *verifica ciertas condiciones de tamaño y suavidad.*

Condición de tamaño: S_α^*

$$|K_\alpha(x,y)| \leq \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Condición de Suavidad: $H_{\alpha,\infty}^*$

$$|K_\alpha(x,y) - K_\alpha(x',y)| + |K_\alpha(y,x) - K_\alpha(y,x')| \leq C \frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n-\alpha+\eta}},$$

donde $|x-y| \geq 2|x-x'|$ y para $0 < \eta \leq 1$.

Definimos ***el operador fraccionario*** T_α, *con* $0 < \alpha < n$,

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x, y) f(y) dy,$$

donde K_α *verifica ciertas condiciones de tamaño y suavidad.*

Condición de tamaño: S_α^*

$$|K_\alpha(x, y)| \leq \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Condición de Suavidad: $H_{\alpha,\infty}^*$

$$|K_\alpha(x, y) - K_\alpha(x', y)| + |K_\alpha(y, x) - K_\alpha(y, x')| \leq C \frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n-\alpha+\eta}},$$

donde $|x-y| \geq 2|x-x'|$ y para $0 < \eta \leq 1$.

Ejemplo

Cuando $K_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$, *entonces* $K_\alpha \in S_\alpha^* \cap H_{\alpha,\infty}^*$. *En este caso,* $T_\alpha f(x) = I_\alpha f(x)$, *el operador integral fraccionario clásico.*

Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*,* ***el conmutador de orden*** m ***con símbolo*** b*, se define por*

$$T^m_{\alpha,b}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K_\alpha(x,y) f(y)\, dy,$$

donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

*Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, **el conmutador de orden** m **con símbolo** b, se define por*

$$T^m_{\alpha,b} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K_\alpha(x,y) f(y)\, dy,$$

donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea w un peso,

Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*,* ***el conmutador de orden*** m ***con símbolo*** b*, se define por*

$$T^m_{\alpha,b}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K_\alpha(x,y) f(y)\, dy,$$

donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

Sea w un peso,

- $w \in A_p \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-1/(p-1)} \right)^{p-1} \leq C$

*Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, **el conmutador de orden** m **con símbolo** b, se define por*

$$T^m_{\alpha,b}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K_\alpha(x,y) f(y)\, dy,$$

donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea w un peso,

- $w \in A_p \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-1/(p-1)} \right)^{p-1} \leq C$
- $w \in A_{p,q} \Leftrightarrow w^{-p'} \in A_{1+p'/q}$

Sea $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ***el conmutador de orden*** m ***con símbolo*** b*, se define por*

$$T^m_{\alpha,b} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K_\alpha(x,y) f(y)\, dy,$$

donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea w un peso,

- $w \in A_p \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1/(p-1)}\right)^{p-1} \leq C$
- $w \in A_{p,q} \Leftrightarrow w^{-p'} \in A_{1+p'/q}$
- $w \in A_{p,\infty} \Leftrightarrow w^{-p'} \in A_1$

- Decimos que $\boxed{f \in L^p(w^{-1})}$ si $f/w \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

- Decimos que $\boxed{f \in L^p(w^{-1})}$ si $f/w \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
- $\boxed{g \in BMO_w}$ si,

$$\|w^{-1}\chi_B\|_\infty \frac{1}{|B|}\int_B |g(x) - m_B(g)|\, dx \,\leq\, C$$

donde $m_B(g) = \frac{1}{|B|}\int_B g(x)dx$.

- Decimos que $\boxed{f \in L^p(w^{-1})}$ si $f/w \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
- $\boxed{g \in BMO_w}$ si,

$$\|w^{-1}\chi_B\|_\infty \frac{1}{|B|}\int_B |g(x) - m_B(g)|\,dx \leq C$$

donde $m_B(g) = \frac{1}{|B|}\int_B g(x)dx$.

- $H : L^p(w) \to L^p(w) \Leftrightarrow w \in A_p$

- Decimos que $\boxed{f \in L^p(w^{-1})}$ si $f/w \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
- $\boxed{g \in BMO_w}$ si,

$$\|w^{-1}\chi_B\|_\infty \frac{1}{|B|}\int_B |g(x) - m_B(g)|\, dx \leq C$$

  donde $m_B(g) = \frac{1}{|B|}\int_B g(x)dx$.

- $H : L^p(w) \to L^p(w) \Leftrightarrow w \in A_p$
  En general,
- $T : L^p(w) \to L^p(w) \Leftrightarrow w \in A_p$

- Decimos que $\boxed{f \in L^p(w^{-1})}$ si $f/w \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
- $\boxed{g \in BMO_w}$ si,

$$\|w^{-1}\chi_B\|_\infty \frac{1}{|B|} \int_B |g(x) - m_B(g)|\, dx \,\leq\, C$$

  donde $m_B(g) = \frac{1}{|B|}\int_B g(x)dx$.

- $H : L^p(w) \to L^p(w) \Leftrightarrow w \in A_p$
  En general,
- $T : L^p(w) \to L^p(w) \Leftrightarrow w \in A_p$

Sea $0 < \alpha < n$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$

- $I_\alpha : L^p(w) \to L^q(w) \Leftrightarrow w \in A_{p,q}$

Para el caso límite $p = n/\alpha$ y $q = \infty$

- $I_\alpha : L^{n/\alpha}(w^{-1}) \to BMO_w \Leftrightarrow w^{-1} \in A_{n/\alpha,\infty}$

Para el caso límite $p = n/\alpha$ y $q = \infty$

- $I_\alpha : L^{n/\alpha}(w^{-1}) \to BMO_w \Leftrightarrow w^{-1} \in A_{n/\alpha,\infty}$

Para **el conmutador de primer orden** con símbolo $b \in BMO$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, se sabe que si $w \in A_{p,q}$:

Para el caso límite $p = n/\alpha$ y $q = \infty$

- $I_\alpha : L^{n/\alpha}(w^{-1}) \to BMO_w \Leftrightarrow w^{-1} \in A_{n/\alpha,\infty}$

Para **el conmutador de primer orden** con símbolo $b \in BMO$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, se sabe que si $w \in A_{p,q}$:

- $[b, I_\alpha] : L^p(w) \to L^q(w)$

Para el caso límite $p = n/\alpha$ y $q = \infty$

- $I_\alpha : L^{n/\alpha}(w^{-1}) \to BMO_w \Leftrightarrow w^{-1} \in A_{n/\alpha,\infty}$

Para **el conmutador de primer orden** con símbolo $b \in BMO$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, se sabe que si $w \in A_{p,q}$:

- $[b, I_\alpha] : L^p(w) \to L^q(w)$

Analogamente, cuando $b \in BMO$ y $w \in A_p$:

- $[b, T] : L^p(w) \to L^p(w)$

Para el caso límite $p = n/\alpha$ y $q = \infty$

- $I_\alpha : L^{n/\alpha}(w^{-1}) \to BMO_w \Leftrightarrow w^{-1} \in A_{n/\alpha,\infty}$

Para **el conmutador de primer orden** con símbolo $b \in BMO$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, se sabe que si $w \in A_{p,q}$:

- $[b, I_\alpha] : L^p(w) \to L^q(w)$

Analogamente, cuando $b \in BMO$ y $w \in A_p$:

- $[b, T] : L^p(w) \to L^p(w)$

Sin embargo, para los casos límites con $w \equiv 1$ y $b \in BMO$:

- $[b, H] : L^\infty(\mathbb{R}) \to BMO \Leftrightarrow b$ es constante.
- $[b, I_\alpha] : L^{n/\alpha}(\mathbb{R}) \to BMO \Leftrightarrow b$ es constante. (Probado en[HST])

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$,

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*:*

$$|b(x) - b(y)| \leq\ C\,|x - y|^{\delta}$$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*:*

$$|b(x) - b(y)| \leq\ C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C*, la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(x) - b(y)| \leq C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C, *la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$. *Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(x) - b(y)| \leq C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C, *la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$. *Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\,dx \leq C$$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists$ C *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*:*

$$|b(x) - b(y)| \leq C\, |x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C*, la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$*.*

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$*. Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\, dx \leq C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$*.*

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists$ C *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(x) - b(y)| \leq C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C, *la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$. *Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\, dx \leq C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. *A la menor constante* C *la notamos con* $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

Si $w \equiv 1$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(x) - b(y)| \leq\ C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C*, la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$. *Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\, dx\ \leq\ C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. *A la menor constante* C *la notamos con* $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

$$\text{Si}\ \ w \equiv 1\ \ \begin{cases} \beta = 0 \\ \\ \end{cases}$$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*:*

$$|b(x) - b(y)| \leq \ C\,|x-y|^{\delta}$$

A la menor constante C*, la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$*. Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\, dx \ \leq \ C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$*. A la menor constante* C *la notamos con* $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

$$\text{Si} \ \ w \equiv 1 \ \begin{cases} \beta = 0 & \qquad \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ BMO \\ & \\ & \end{cases}$$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists$ C *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*:*

$$|b(x) - b(y)| \leq \, C \, |x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C*, la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$*.*

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$*. Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)| \, dx \, \leq \, C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$*. A la menor constante* C *la notamos con* $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$*.*

$$\text{Si} \;\; w \equiv 1 \;\; \begin{cases} \beta = 0 & \qquad \mathcal{L}_w(\beta) \, = \, BMO \\ 0 < \beta < 1/n & \\ & \end{cases}$$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists$ C *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(x) - b(y)| \leq \; C\,|x-y|^{\delta}$$

A la menor constante C, *la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$. *Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\, dx \;\leq\; C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. *A la menor constante* C *la notamos con* $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

$$\text{Si}\;\; w \equiv 1 \;\; \begin{cases} \beta = 0 & \mathcal{L}_w(\beta) \;=\; BMO \\ 0 < \beta < 1/n & \mathcal{L}_w(\beta) \;=\; \text{Lipschitz}(\beta) \\ \end{cases}$$

Dado $0 < \delta < 1$, diremos que $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists$ C *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*:*

$$|b(x) - b(y)| \leq C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C, la notaremos como $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w un peso y $-1 < \beta < 1/n$. Diremos que $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe C tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\, dx \leq C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. A la menor constante C la notamos con $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

$$\text{Si } \; w \equiv 1 \; \begin{cases} \beta = 0 & \mathcal{L}_w(\beta) = BMO \\ 0 < \beta < 1/n & \mathcal{L}_w(\beta) = \text{Lipschitz}(\beta) \\ -1 < \beta < 0 & \end{cases}$$

Dado $0 < \delta < 1$, diremos que $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si $\exists$ C tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$|b(x) - b(y)| \leq \ C\,|x-y|^{\delta}$$

A la menor constante C, la notaremos como $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w un peso y $-1 < \beta < 1/n$. Diremos que $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe C tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\,dx \ \leq \ C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. A la menor constante C la notamos con $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

$$\text{Si} \ \ w \equiv 1 \ \begin{cases} \beta = 0 & \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ BMO \\ 0 < \beta < 1/n & \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ \text{Lipschitz}(\beta) \\ -1 < \beta < 0 & \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ \text{Espacios de Morrey} \end{cases}$$

Dado $0 < \delta < 1$, *diremos que* $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si* $\exists\ C$ *tal que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(x) - b(y)| \leq \ C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C, *la notaremos como* $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Definición

Sea w *un peso y* $-1 < \beta < 1/n$. *Diremos que* $\boxed{f \in \mathcal{L}_w(\beta)}$ *si existe* C *tal que:*

$$\frac{1}{w(B)|B|^{\beta}} \int_B |f(x) - m_B(f)|\,dx \ \leq \ C$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. *A la menor constante* C *la notamos con* $\|f\|_{\mathcal{L}_w(\beta)}$.

$$\text{Si} \ \ w \equiv 1 \ \begin{cases} \beta = 0 & \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ BMO \\ 0 < \beta < 1/n & \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ \text{Lipschitz}(\beta) \\ -1 < \beta < 0 & \mathcal{L}_w(\beta) \ = \ \text{Espacios de Morrey} \end{cases}$$

Para w en general y $\beta = 0$, el espacio $\mathcal{L}_w(\beta) = BMO_w$ introducido por Muckenhoupt y Wheeden en [M-W].

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})}$

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0<\alpha<n$, $\delta\in\mathbb{R}^+$ *y* $1<r\leq\infty$. *Diremos que* $\boxed{w\in H(r,\tilde{\alpha})}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n}+|x_B-y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}}\,dy\right)^{1/r'}$$

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - \tilde{\alpha} + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - \tilde{\alpha} + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Donde $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$ y $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - \tilde{\alpha} + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Donde $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$ y $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.

$\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})} \iff$

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0 < \alpha < n$*,* $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$*. Diremos que* $\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - \tilde{\alpha} + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B*.*

Donde $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$ y $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.

$$\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})} \iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Condición local}} \\ \dfrac{|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}}}{w(B)} \left(\int_B w^{r'}(y) dy \right)^{1/r'} \leq C \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Para trabajar con el conmutador de integrales fraccionarias...

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Donde $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$ y $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.

$$\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})} \iff \begin{cases} \boxed{\text{Condición local}} \\ \quad \dfrac{|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}}}{w(B)} \left(\displaystyle\int_B w^{r'}(y) dy \right)^{1/r'} \leq C \\ \boxed{\text{Condición Global}} \\ \quad |B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n - B} \frac{w^{r'}(y)}{|x_B - y|^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} dy \right)^{1/r'} \leq C \dfrac{w(B)}{|B|} \end{cases}$$

Se puede ver que $\boxed{\text{Condición Global}} \Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$

Con lo cual, para el caso de un solo peso w,

Se puede ver que $\boxed{\text{Condición Global}} \Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$

Con lo cual, para el caso de un solo peso w,

$$\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Condición Global}}$$

Se puede ver que $\boxed{\text{Condición Global}} \Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$

Con lo cual, para el caso de un solo peso w,

$$\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Condición Global}}$$

1. Para $m = 0$ la clase $H(r, \tilde{\alpha})$ coincide con la clase $H(r, \alpha)$ definida en [HSV].

Se puede ver que $\boxed{\text{Condición Global}} \Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$

Con lo cual, para el caso de un solo peso w,

$$\boxed{w \in H(r,\tilde{\alpha})} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Condición Global}}$$

1. Para $m = 0$ la clase $H(r,\tilde{\alpha})$ coincide con la clase $H(r,\alpha)$ definida en [HSV].

Si $w^{-1} \in A_{r,\infty}$ $(i.e,\ w^{r'} \in A_1) \Longrightarrow w \in H(r,\tilde{\alpha})$.

Se puede ver que $\boxed{\text{Condición Global}} \Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$

Con lo cual, para el caso de un solo peso w,

$$\boxed{w \in H(r, \tilde{\alpha})} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Condición Global}}$$

1. Para $m = 0$ la clase $H(r, \tilde{\alpha})$ coincide con la clase $H(r, \alpha)$ definida en [HSV].

Si $w^{-1} \in A_{r,\infty}$ $(i.e,\ w^{r'} \in A_1) \Longrightarrow w \in H(r, \tilde{\alpha})$.

Si consideramos $w(x) = |x|^{\beta}$ con $\beta \in (0, n/r - \alpha + 1)$, $w^{r'} \notin A_1$, pero si se puede ver que $w \in H(r, \alpha)$.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Si* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^{+}$ *si* $m = 0$.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Si* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^{+}$ *si* $m = 0$.*Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y*

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$*,* $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$*. Si* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^{+}$ *si* $m = 0$*.Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $w \in H(r, \tilde{\alpha})$*, entonces:*

$$\|T^{m}_{\alpha,b} f\|_{\mathcal{L}_{w}(\tilde{\delta}/n)}$$

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Si* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^+$ *si* $m = 0$*.Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $w \in H(r, \tilde{\alpha})$*, entonces:*

$$\|T^m_{\alpha,b} f\|_{\mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)} \leq \; C\, \|b\|^m_{\Lambda(\delta)} \|f/w\|_{L^r}$$

Recordemos que $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$, $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Si* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^+$ *si* $m = 0$.*Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, *entonces:*

$$\|T^m_{\alpha,b} f\|_{\mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)} \leq \ C \, \|b\|^m_{\Lambda(\delta)} \|f/w\|_{L^r}$$

Recordemos que $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$, $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.
De la elección que hacemos, resulta que

$$0 < \frac{\tilde{\delta}}{n} < \frac{1}{n},$$

entonces estamos en un espacio Lipschitz.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Si* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^{+}$ *si* $m = 0$.*Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, *entonces:*

$$\|T^{m}_{\alpha,b} f\|_{\mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)} \leq \ C\, \|b\|^{m}_{\Lambda(\delta)} \|f/w\|_{L^r}$$

Recordemos que $\tilde{\delta} = m\delta + \alpha - n/r$, $\tilde{\alpha} = m\delta + \alpha$.
De la elección que hacemos, resulta que

$$0 < \frac{\tilde{\delta}}{n} < \frac{1}{n},$$

entonces estamos en un espacio Lipschitz.
Antecedentes..

- Para I_α la acotación fue probado por [HSV] con $w \in H(r, \alpha)$.
- para $T^{m}_{\alpha,b} f$ pero $w \in A_{r,\infty}$ (clase más pequeña) fue probado por [DPR] para otros espacios de Lipschitz.

Sea $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, se puede ver que:

Sea $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, se puede ver que:

- $w^{r'}$ es duplicante,

Sea $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, se puede ver que:

- $w^{r'}$ es duplicante,es decir, $w^{r'}(2B) \leq Cw^{r'}(B)$.
- $w \in RH(r')$,

Sea $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, se puede ver que:

- $w^{r'}$ es duplicante,es decir, $w^{r'}(2B) \leq C w^{r'}(B)$.
- $w \in RH(r')$, es decir,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{r'}(x)\, dx \right)^{1/r'} \leq C \, \frac{w(B)}{|B|}.$$

Sea $w \in H(r, \tilde{\alpha})$, se puede ver que:

- $w^{r'}$ es duplicante,es decir, $w^{r'}(2B) \leq C w^{r'}(B)$.
- $w \in RH(r')$, es decir,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{r'}(x)\, dx \right)^{1/r'} \leq C\, \frac{w(B)}{|B|}.$$

- Existen dos constantes positivas C y ϵ tal que:

$$w^{r'}\,(B(x_B, \theta l)) \leq \; C\, \theta^{(n-\tilde{\alpha}+\delta)r'-\epsilon} w^{r'}\,(B(x_B, l))$$

para toda bola $B(x_B, l)$ y $\forall \theta \geq 1$.

Para trabajar con el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $0 < \delta < 1$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Si* $\tilde{\delta} = m\delta - n/r$ *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, m\delta)}$

Para trabajar con el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $0 < \delta < 1$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Si* $\tilde{\delta} = m\delta - n/r$ *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, m\delta)}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-m\delta+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'}$$

Para trabajar con el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $0 < \delta < 1$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Si* $\tilde{\delta} = m\delta - n/r$ *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, m\delta)}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - m\delta + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Para trabajar con el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $0 < \delta < 1$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Si* $\tilde{\delta} = m\delta - n/r$ *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, m\delta)}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - m\delta + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Teorema

Sea $0 < \delta < \min(\eta, n/m)$. *Sea* $n/(m\delta) \leq r < n/((m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$, *o* $r = \infty$ *si* $m = 0$. *Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $w \in H(r, m\delta)$, *entonces:*

Para trabajar con el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $0 < \delta < 1$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Si* $\tilde{\delta} = m\delta - n/r$ *Diremos que* $\boxed{w \in H(r, m\delta)}$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta - \tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n - m\delta + \delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Teorema

Sea $0 < \delta < \min(\eta, n/m)$. *Sea* $n/(m\delta) \leq r < n/((m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$, *o* $r = \infty$ *si* $m = 0$. *Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $w \in H(r, m\delta)$, *entonces:*

$$\|T^m_{\alpha,b} f\|_{\mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)} \leq \; C \, \|b\|^m_{\Lambda(\delta)} \|f/w\|_{L^r}$$

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ y $1 < r \leq \infty$. Diremos que $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$ si verifica:

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}}\, dy \right)^{1/r'}$$

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ y $1 < r \leq \infty$. Diremos que $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$ si verifica:

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ y x_B el centro de B.

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

$\boxed{(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})} \quad \Leftrightarrow$

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Definición

Sea $0 < \alpha < n$*,* $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$*. Diremos que* $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B*.*

$$\boxed{(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Condición local}} \\ \dfrac{|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}}}{w(B)} \left(\displaystyle\int_B v^{r'}(y) dy \right)^{1/r'} \leq C \end{array} \right.$$

Ahora el objetivo es probar las acotaciones $T : L^r(v^{-1}) \to \mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)$ tanto para $T = T^m_{\alpha,b}$ como para $T = T^m_b$.

Definición

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

$$\boxed{(w,v) \in H(r,\tilde{\alpha})} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\text{Condición local}} \\ \dfrac{|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}}}{w(B)} \left(\displaystyle\int_B v^{r'}(y) dy \right)^{1/r'} \leq C \\ \boxed{\text{Condición Global}} \\ |B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n - B} \frac{v^{r'}(y)}{|x_B - y|^{r'(n-\tilde{\alpha}+\delta)}} dy \right)^{1/r'} \leq C \dfrac{w(B)}{|B|} \end{cases}$$

- Cuando trabajamos con pares de pesos (w, v) y $m = 0$, la clase $H(r, \alpha)$ fue definida en [Pr]. En ese caso,

$$\boxed{\text{Condición Global}} \not\Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$$

- Las técnicas que se usaban fuertemente como reverse Hölder o duplicación no se tienen cuando trabajamos con pares de pesos.

- Cuando trabajamos con pares de pesos (w, v) y $m = 0$, la clase $H(r, \alpha)$ fue definida en [Pr]. En ese caso,

$$\boxed{\text{Condición Global}} \not\Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$$

- Las técnicas que se usaban fuertemente como reverse Hölder o duplicación no se tienen cuando trabajamos con pares de pesos.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Sea* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^+$ *si* $m = 0$. *Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$,

- Cuando trabajamos con pares de pesos (w, v) y $m = 0$, la clase $H(r, \alpha)$ fue definida en [Pr]. En ese caso,

$$\boxed{\text{Condición Global}} \not\Longrightarrow \boxed{\text{Condición local}}$$

- Las técnicas que se usaban fuertemente como reverse Hölder o duplicación no se tienen cuando trabajamos con pares de pesos.

Teorema

Sea $0 < \alpha < n$, $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n-\alpha}{m})$. *Sea* $n/(m\delta + \alpha) \leq r < n/(\alpha + (m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/(\alpha - \eta)^+$ *si* $m = 0$. *Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $(w, v) \in H(r, \tilde{\alpha})$*, entonces:*

$$\|T^m_{\alpha,b} f\|_{\mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)} \leq \; C\, \|b\|^m_{\Lambda(\delta)} \|f/v\|_{L^r}$$

Si queremos acotaciones para el conmutador de integrales singulares...

Si queremos acotaciones para el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $(w, v) \in H(r, m\delta)$

Si queremos acotaciones para el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $(w, v) \in H(r, m\delta)$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-m\delta+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Si queremos acotaciones para el conmutador de integrales singulares...

Definición

Sea $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $1 < r \leq \infty$. *Diremos que* $(w, v) \in H(r, m\delta)$ *si verifica:*

$$|B|^{\frac{\delta-\tilde{\delta}}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-m\delta+\delta)}} \, dy \right)^{1/r'} \leq C \frac{w(B)}{|B|}$$

$\forall B \subset \mathbb{R}^n$ *y* x_B *el centro de* B.

Teorema

Sea $0 < \delta < \min(\eta, \frac{n}{m})$ *y sea* $n/(m\delta) \leq r < n/((m-1)\delta)$ *si* $m \geq 1$ *o* $n/\alpha \leq r < n/\eta$ *si* $m = 0$. *Si* $b \in \Lambda(\delta)$ *y* $(w, v) \in H(r, m\delta)$, *entonces:*

$$\|T_b^m f\|_{\mathcal{L}_w(\tilde{\delta}/n)} \leq \; C \, \|b\|_{\Lambda(\delta)}^m \|f/v\|_{L^r}$$

Bibliografía

E. Dalmasso, G. Pradolini y W. Ramos, *The effect of the smoothness of fractional type operators over their commutators with Lipschitz symbols on weighted spaces*. Fract. Calc. Appl. Anal, **21**(3) 628-653, 2018.

E.Harboure, O. Salinas y B. Viviani, *Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and lipschitz spaces*. Trans. of the Amer. Math. Soc. **349**(1) 235-255, 1997.

E.Harboure, C. Segovia y J.L. Torrea, *Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p*. Illinois J. Math., **41**(4) 676-700, 1997.

B. Muckenhoup y R. Wheeden, *Weighted Bounded Mean Oscillation and the Hilbert Transform*. Studia Math. **54** 221-237, 1976.

G. Pradolini, *A class of pairs of weights related to the boundedness of the fractional integral operator between L^p and Lipschitz spaces*. Comment. Math. Univ. Carolinae, **42**(1) 133-152, 2001.