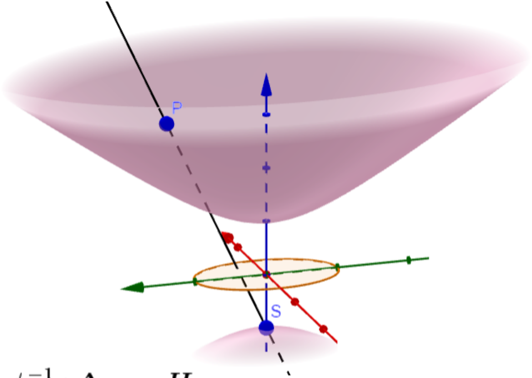
Modelos de Variedades Semi-Riemannianas con Curvatura Variable.

Lic Mariana Cisneros - Mgtr Daniela Emmanuele

Proy ING 607
Fac de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - UNR
Argentina

XV Congreso Dr A. Monteiro - 5 al 7 de junio 2019
Bahía Blanca, Argentina



$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \Delta &\to H \\ (x, y) &\to \phi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right) \end{aligned}$$

Modelo con métrica conforme a la métrica euclídea

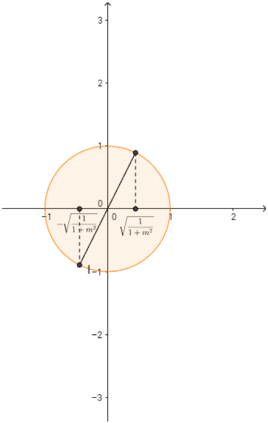
Sea H con las coordenadas (x_1, x_2) definidas por ϕ^{-1} junto con la métrica

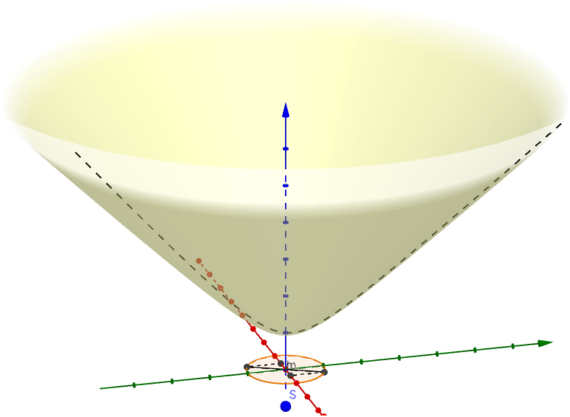
$$ds^2 = 2\frac{dx_1^2 + dx_2^2}{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$$

Tenemos entonces una métrica conforme a la métrica euclídea por lo que H dotado de esta métrica es una variedad Riemanniana con curvatura variable y negativa:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1-(x_1^2+x_2^2)}{2}\left\{\frac{1+x_1^2-x_2^2+1-x_1^2+x_2^2}{\left(1-(x_1^2+x_2^2)\right)^2}\right\} \\ &= -\frac{1-(x_1^2+x_2^2)}{\left(1-(x_1^2+x_2^2)\right)^2} \\ &= -\frac{1}{1-(x_1^2+x_2^2)} \qquad (1) \end{aligned}$$

Sea $\gamma(t) = \phi^{-1}(t, mt)$ con $t \in \left(-\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}, \sqrt{\frac{1}{1+m^2}}\right)$





Pregeodésicas en H

Calculamos la derivada covariante de $\gamma^{'}$

$$\begin{aligned}\frac{D\gamma^{'}}{dt} &= \frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\frac{\partial}{\partial x^1} + m\frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= \frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + m\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\ &= \frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\,\gamma^{'}(t) \qquad (2)\end{aligned}$$

Conclusión

γ es una pregeodésica en H para todo m.

Calculamos la derivada covariante de $\gamma^{'}$

$$\begin{aligned}\frac{D\gamma^{'}}{dt} &= \frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\frac{\partial}{\partial x^1} + m\frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\\ &= \frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + m\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\\ &= \frac{t(1+m^2)}{1-(1+m^2)t^2}\,\gamma^{'}(t) \qquad (2)\end{aligned}$$

Conclusión

γ es una pregeodésica en H para todo m.

Sea $\alpha(t) = \phi^{-1}(0, t)\ \forall t \in (-1, 1)$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha^{'}}{dt} &= \frac{1}{1-t^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{1-t^2}\ \alpha^{'}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Conclusión

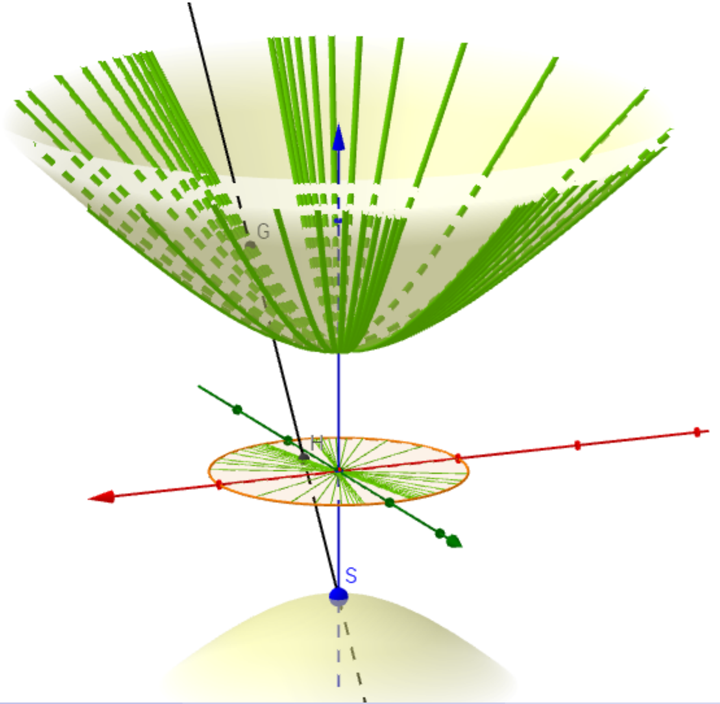
α es una reparametrización de una geodésica en H.

Sea $\alpha(t) = \phi^{-1}(0, t)\ \forall t \in (-1, 1)$. Tenemos entonces que:

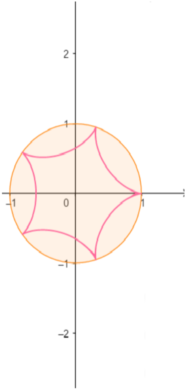
$$\begin{aligned} \frac{D\alpha'}{dt} &= \frac{1}{1-t^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{1-t^2}\,\alpha'(t) \end{aligned} \tag{3}$$

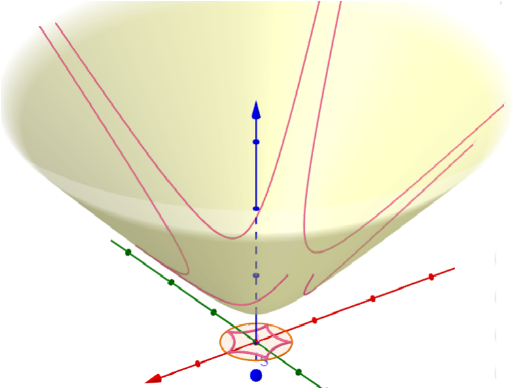
Conclusión

α es una reparametrización de una geodésica en H.


G
H
S

Veamos ahora las curvas definidas por $\beta(t) = \phi^{-1}(\beta_1(t), \beta_2(t))$ donde
$\beta_1 = (1-r)\,cos(t) + r\,cos\left(\frac{1-r}{r}\,t\right)$ y
$\beta_2 = (1-r)\,sen(t) - r\,sen\left(\frac{1-r}{r}\,t\right)$; $t \in [0, 2\pi]$ son geodésicas en H;





$\forall r \in (0,1)$.

Calculemos entonces la derivada covariante de β'

$$\frac{\beta_1}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\left(\beta_1'\right)^2+2\frac{\beta_2}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\beta_1'\beta_2'-\frac{\beta_1}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\left(\beta_2'\right)^2=$$

$$\frac{r-1}{r}\left((r-1)\,cos\left(\tfrac{1-r}{r}\,t\right)-r\,cos(t)\right)$$

$$\beta_1''=\frac{r-1}{r}\left((1-r)\,cos\left(\frac{1-r}{r}\,t\right)+r\,cos(t)\right)$$

Luego

$$\beta_1''+\frac{\beta_1}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}(\beta_1')^2+2\frac{\beta_2}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\beta_1'\beta_2'-\frac{\beta_1}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}(\beta_2')^2=0$$

$$-\frac{\beta_2}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\left(\beta_1^{'}\right)^2+2\frac{\beta_1}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\beta_1^{'}\beta_2^{'}+\frac{\beta_2}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\left(\beta_2^{'}\right)^2=$$

$$\frac{r-1}{r}\left(-(r-1)\,sen\left(\tfrac{1-r}{r}\,t\right)-r\,sen(t)\right)$$

$$\beta_2^{''}=\frac{r-1}{r}\left((1-r)\,sen\left(\frac{1-r}{r}\,t\right)+r\,sen(t)\right)$$

Luego

$$\beta_2^{''}-\frac{\beta_2}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}(\beta_1^{'})^2+2\frac{\beta_1}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}\beta_1^{'}\beta_2^{'}+\frac{\beta_2}{1-(\beta_1^2+\beta_2^2)}(\beta_2^{'})^2=0$$

Conclusión

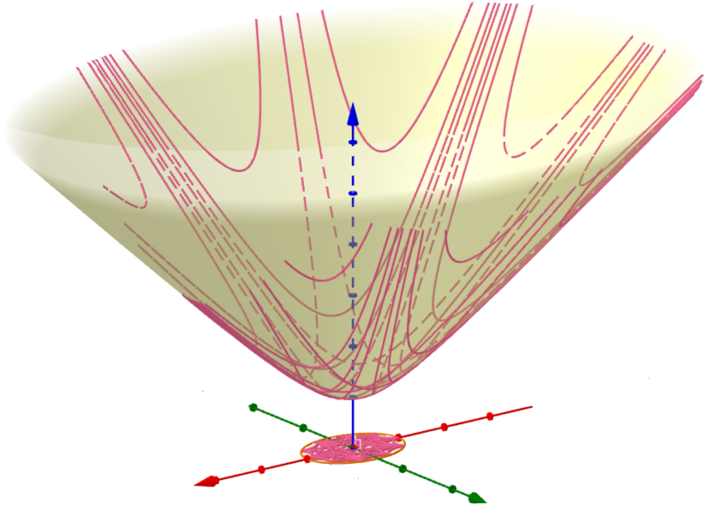
β es una geodésica para todo $r \in (0,1)$.

Conclusión

β es una geodésica para todo $r \in (0, 1)$.

Conclusión

β es una geodésica para todo $r \in (0, 1)$.



Geodésicas en H

En Emmanuele-Salvai se estudia la geometría del disco Δ en coordenadas polares con la métrica:

$$ds^2 = 2\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 - r^2}$$

resultando que todas las geodésicas son los segmentos que contienen al origen y las hipocicloides. Hemos probado en este trabajo que proyección estereográfica hiperbólica ϕ es una isometría entre Δ y H dotados con métricas mencionadas. Por lo que:

Conclusión

Describimos todas las geodésicas de H, superficie Riemanniana de curvatura variable y negativa.

En Emmanuele-Salvai se estudia la geometría del disco Δ en coordenadas polares con la métrica:

$$ds^2 = 2\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{1 - r^2}$$

resultando que todas las geodésicas son los segmentos que contienen al origen y las hipocicloides. Hemos probado en este trabajo que proyección estereográfica hiperbólica ϕ es una isometría entre Δ y H dotados con métricas mencionadas. Por lo que:

Conclusión

Describimos todas las geodésicas de H, superficie Riemanniana de curvatura variable y negativa.

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
   - Espacial si $\langle V_P, V_P \rangle > 0$ o $V_P = \overline{0}$
   - Nulo o luminoso si $\langle V_P, V_P \rangle = 0$ y $V_P \neq \overline{0}$
   - Temporal si $\langle V_P, V_P \rangle < 0$
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
    - Cono nulo es el conjunto de los vectores nulos.
    - Cono temporal que contiene a V_p es el conjunto de los vectores temporales X_P tales que $\langle X_p, V_p \rangle < 0$
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
   - geodésica espacial si $\gamma^{'}$ es espacial
   - geodésica temporal si $\gamma^{'}$ es temporal
   - geodésica nula si $\gamma^{'}$ es nulo
4. Orientación temporal:

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:
   Sea $\tau : M \to \bigcup_{P \in M} T_P(M)$ suave tal que $\tau(P) = \tau_p$ es un cono temporal en $T_P(M)$; llamada orientación temporal de M. Diremos que M es temporalmente orientable cuando M admite una orientación temporal. La orientación temporal de M elegida es llamada el futuro y la opuesta es llamada el pasado.

Variedad de Lorentz

1. Causalidad de los vectores tangentes:
2. Definición del cono nulo y cono temporal en $T_p(M)$:
3. Causalidad de una geodésica:
4. Orientación temporal:
   Un espacio tiempo es una variedad de Lorentz conexa y temporalmente orientable.

Modelo con métrica conforme a la métrica de Minkowski

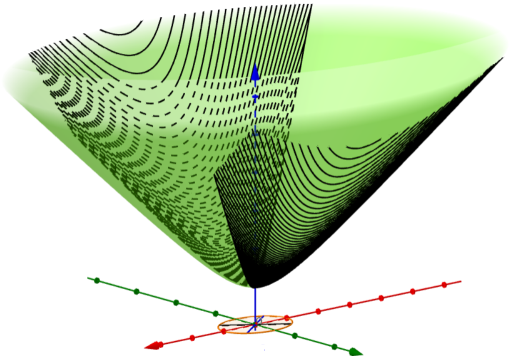
Sea H con las coordenadas definidas por ϕ^{-1} junto con la métrica:

$$ds^2 = 2\frac{dx_1^2 - dx_2^2}{1-(x_1^2+x_2^2)}$$

Tenemos entonces una métrica conforme a la métrica de Minkowski por lo H dotado con esa métrica es una superficie de Lorentz con curvatura variable:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1-(x_1^2+x_2^2)}{2}\left\{\frac{\left(1+x_1^2-x_2^2\right)-\left(1-x_1^2+x_2^2\right)}{\left(1-(x_1^2+x_2^2)\right)^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2(x_1^2-x_2^2)}{(1-(x_1^2+x_2^2))} \\ &= \frac{x_2^2-x_1^2}{1-(x_1^2+x_2^2)} \end{aligned}$$

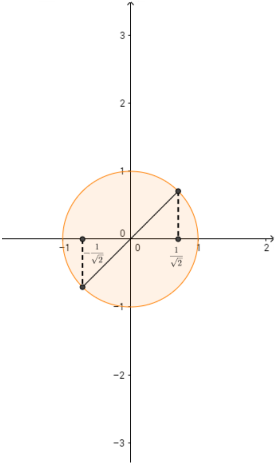
Las únicas pregeodésicas nulas de H son $\alpha(t) = \phi^{-1}(t + x_0, t + y_0)$ y $\beta(t) = \phi^{-1}(t + x_0, -t + y_0)$ con $t \in I$ y $(x_0, y_0) \in \Delta$; heredando también su orientación temporal, su cronología y su cono causal futuro.

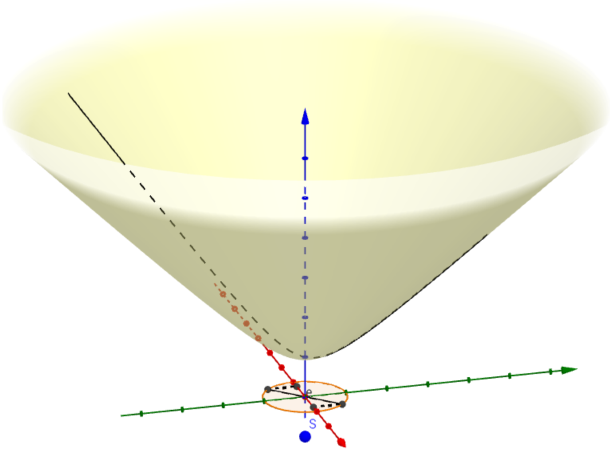


Futuro y pasado cronológico de N

Completitud

Sea $\alpha(t) = \phi^{-1}(t,t)$ con $t \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$





Geodésica α

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \frac{4t}{1-2t^2}\ \alpha'(t)$$

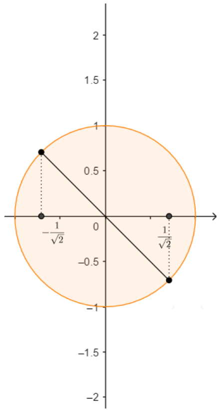
$$\begin{aligned} s'(t) &= c_0\ exp\left(\int_0^t \frac{4u}{1-2u^2}du\right) \\ &= \frac{c_0}{1-2t^2} \end{aligned}$$

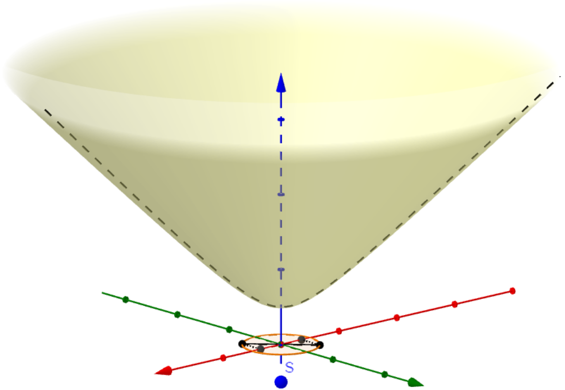
$$s(t) = c_0\sqrt{2}\ arctanh\left(\sqrt{2}t\right)$$

$$t(s) = t = \frac{1}{\sqrt{2}}\tanh\left(\sqrt{2}\frac{s}{c_0}\right)\ \ \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh\left(\sqrt{2}\frac{s}{c_0}\right)\right)\ \ \forall s \in \mathbb{R}$$

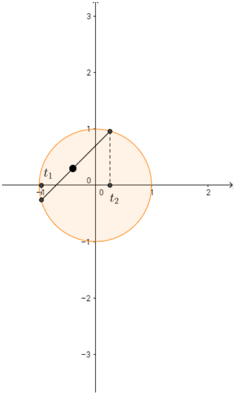
Dada $\beta(t) = \phi^{-1}(t, -t)$ con $t \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

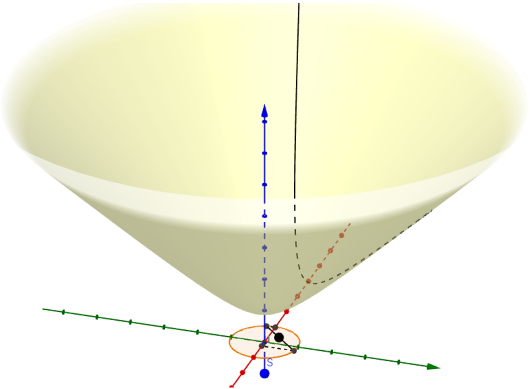




Su reparametrización es $\widetilde{\beta}(s) = \beta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh\left(\sqrt{2}\frac{s}{c_0}\right)\right)\ \forall s \in \mathbb{R}$

Sea $\alpha(t) = \phi^{-1}(r\ cos(\theta) + t, r\ sen(\theta) + t)$ con $t \in (t_1, t_2)$



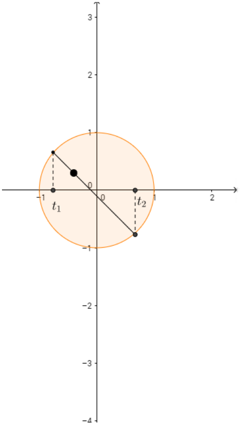


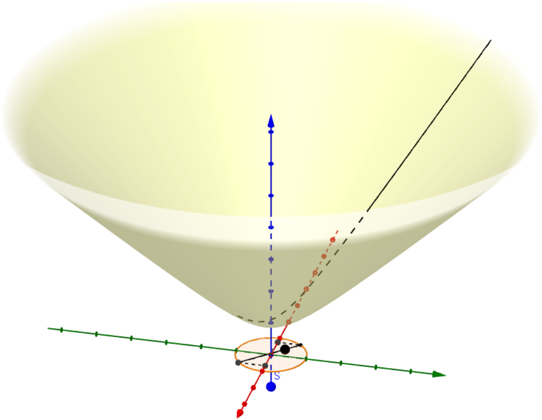
Su reparametrización en el parámetro afín es:

$$\widetilde{\alpha}(s) = \alpha\left(a_0 \frac{e^{s/b_0} - 1}{t_2 - t_1 e^{s/b_0}}\right); \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ con } a_0 = t_1 t_2 \text{ y}$$

$$b_0 = c_0 \frac{1 - r^2}{\sqrt{2 - r^2 + r^2\ sen(2\theta)}}$$

Dada $\beta(t) = \phi^{-1}(r\ cos(\theta) + t, r\ sen(\theta) - t)$ con $t \in (t_1, t_2)$





$$\widetilde{\beta}(s) = \beta\left(a_0 \frac{e^{s/b_0} - 1}{t_2 - t_1 e^{s/b_0}}\right) \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ con } a_0 = t_1 t_2 \text{ y}$$

$$b_0 = c_0 \frac{1 - r^2}{\sqrt{2 - r^2 - r^2\ sen(2\theta)}}$$

Conclusión

H es geodésicamente completo nulo.

1. La reparametrización de la pregeodésica espacial $\lambda(t) = \phi^{-1}(t, 0)$ con $t \in (-1, 1)$ es $\widetilde{\lambda}(s) = \lambda\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La reparametrización de la pregeodésica temporal $\nu(t) = \phi^{-1}(0, t)$ es $\widetilde{\nu}(s) = \nu\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusión

H es incompleto espacial y temporal.

Conclusión

H es geodésicamente completo nulo.

1. La reparametrización de la pregeodésica espacial $\lambda(t) = \phi^{-1}(t, 0)$ con $t \in (-1, 1)$ es $\widetilde{\lambda}(s) = \lambda\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La reparametrización de la pregeodésica temporal $\nu(t) = \phi^{-1}(0, t)$ es $\widetilde{\nu}(s) = \nu\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusión

H es incompleto espacial y temporal.

Conclusión

H es geodésicamente completo nulo.

Analizando la completitud espacial y temporal tenemos:

1. La reparametrización de la pregeodésica espacial $\lambda(t) = \phi^{-1}(t, 0)$ con $t \in (-1, 1)$ es $\widetilde{\lambda}(s) = \lambda\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La reparametrización de la pregeodésica temporal $\nu(t) = \phi^{-1}(0, t)$ es $\widetilde{\nu}(s) = \nu\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusión

H es incompleto espacial y temporal.

Conclusión

H es geodésicamente completo nulo.

1. La reparametrización de la pregeodésica espacial $\lambda(t) = \phi^{-1}(t, 0)$ con $t \in (-1, 1)$ es $\widetilde{\lambda}(s) = \lambda\left(sen(s/s_0)\right)$ $\forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La reparametrización de la pregeodésica temporal $\nu(t) = \phi^{-1}(0, t)$ es $\widetilde{\nu}(s) = \nu\left(sen(s/s_0)\right)$ $\forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusión

H es incompleto espacial y temporal.

Conclusión

H es geodésicamente completo nulo.

1. La reparametrización de la pregeodésica espacial $\lambda(t) = \phi^{-1}(t, 0)$ con $t \in (-1, 1)$ es $\widetilde{\lambda}(s) = \lambda\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La reparametrización de la pregeodésica temporal $\nu(t) = \phi^{-1}(0, t)$ es $\widetilde{\nu}(s) = \nu\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusión

H es incompleto espacial y temporal.

Conclusión

H es geodésicamente completo nulo.

1. La reparametrización de la pregeodésica espacial $\lambda(t) = \phi^{-1}(t, 0)$ con $t \in (-1, 1)$ es $\widetilde{\lambda}(s) = \lambda\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. La reparametrización de la pregeodésica temporal $\nu(t) = \phi^{-1}(0, t)$ es $\widetilde{\nu}(s) = \nu\left(sen(s/s_0)\right)\ \forall s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusión

H es incompleto espacial y temporal.

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2} S \ g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
    1. Condición débil:

    $$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2} S \ g$$

    2. Condición fuerte:

    $$T(v,v) \geq \frac{1}{2} \ tr(T) \ g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad: H es cronológico.
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2} S\ g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

   $$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2} S\ g$$

   2. Condición fuerte:

   $$T(v,v) \geq \frac{1}{2}\ tr(T)\ g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2}S\, g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

   $$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2}S\, g$$

   2. Condición fuerte:

   $$T(v,v) \geq \frac{1}{2}\, tr(T)\, g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal: $R(v,v) = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{1-(x_1^2+x_2^2)}$
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2}S\ g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

   $$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2}S\ g$$

   2. Condición fuerte:

   $$T(v,v) \geq \frac{1}{2}\,tr(T)\ g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2} S\ g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

$$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2} S\ g$$

   2. Condición fuerte:

$$T(v,v) \geq \frac{1}{2}\ tr(T)\ g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad: H es inextensible por se completo nulo.
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2}S\ g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

   $$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2}S\ g$$

   2. Condición fuerte:

   $$T(v,v) \geq \frac{1}{2}\ tr(T)\ g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2} S \; g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

$$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2} S \; g$$

   2. Condición fuerte:

$$T(v,v) \geq \frac{1}{2} \; tr(T) \; g(v,v)$$

Condiciones de Plausibilidad

1. Condiciones de Causalidad:
2. Convergencia temporal:
3. Inextensibilidad:
4. Ecuación de Einsten.

$$Ric - \frac{1}{2}S\ g = 8\pi T$$

5. Condiciones de Energía.
   1. Condición débil:

$$T(v,v) \geq 0 \Leftrightarrow Ric(v,v) \geq \frac{1}{2}S\ g$$

   2. Condición fuerte:

$$T(v,v) \geq \frac{1}{2}\ tr(T)\ g(v,v)$$

1. Componentes del Tensor de Ricci:

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{112} = 2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

$$R_{12} = R^1_{121} + R^2_{122} = 0$$

$$R_{21} = R^1_{211} + R^2_{212} = 0$$

$$R_{22} = R^1_{221} + R^2_{222} = -2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

2. Curvatura Escalar:

$$S = \sum g^{ij}\ R_{ij} = g^{11}\ R_{11} + g^{22}\ R_{22} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

1. Componentes del Tensor de Ricci:

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{112} = 2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

$$R_{12} = R^1_{121} + R^2_{122} = 0$$

$$R_{21} = R^1_{211} + R^2_{212} = 0$$

$$R_{22} = R^1_{221} + R^2_{222} = -2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

2. Curvatura Escalar:

$$S = \sum g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

1. Componentes del Tensor de Ricci:

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{112} = 2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

$$R_{12} = R^1_{121} + R^2_{122} = 0$$

$$R_{21} = R^1_{211} + R^2_{212} = 0$$

$$R_{22} = R^1_{221} + R^2_{222} = -2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

2. Curvatura Escalar:

$$S = \sum g^{ij}\ R_{ij} = g^{11}\ R_{11} + g^{22}\ R_{22} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

1. Componentes del Tensor de Ricci:

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{112} = 2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

$$R_{12} = R^1_{121} + R^2_{122} = 0$$

$$R_{21} = R^1_{211} + R^2_{212} = 0$$

$$R_{22} = R^1_{221} + R^2_{222} = -2\frac{x_2^2 - x_1^2}{\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)^2}$$

2. Curvatura Escalar:

$$S = \sum g^{ij}\ R_{ij} = g^{11}\ R_{11} + g^{22}\ R_{22} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

El tensor es nulo por lo tanto cumple con la condición débil de energía

¡Muchas Gracias por su atención!