Un integrador geométrico para control óptimo en SE(3)

Quijón Guadalupe

trabajo conjunto con Ferraro Sebastián

Universidad Nacional del Sur-CONICET

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro, Bahía Blanca, junio 2019

Contenido de la Comunicación

Sistema Mecánico Discreto

Consideremos un sistema mecánico cuyo espacio de configuraciones es Q. Dado un **Lagrangiano discreto**, $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$ función suave y una **curva discreta** $\{q_k\}_{k=0}^{N} \subset Q$, se define la **acción discreta**:

$$\mathbb{S}_d(q_0, ..., q_N) = \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1})$$

Tomando variaciones de la secuencia con extremos fijos q_0 y q_N, y buscando los puntos críticos de la acción discreta se obtienen las **Ecuaciones de Euler-Lagrange Discretas** (DEL):

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = 0 \qquad (1)$$

para $1 \leq k \leq N - 1$

Sistema de Ecuaciones Discretas de 2do Orden

Para el caso $L_d : TQ \times TQ \to \mathbb{R}$ y una curva discreta $\{(q_k, v_k)\}_{k=0}^{N} \subset TQ$. La acción discreta es:

$$\mathbb{S}_d((q_0, v_0), ..., (q_N, v_N)) = \sum_{k=0}^{N-1} L_d((q_k, v_k), (q_{k+1}, v_{k+1}))$$

Las DEL para control óptimo son:

$$D_3 L_d(q_{k-1}, v_{k-1}, q_k, v_k) + D_1 L_d(q_k, v_k, q_{k+1}, v_{k+1}) = 0, \qquad \text{(2a)}$$

$$D_4 L_d(q_{k-1}, v_{k-1}, q_k, v_k) + D_2 L_d(q_k, v_k, q_{k+1}, v_{k+1}) = 0, \qquad \text{(2b)}$$

para $1 \leq k \leq N - 1$.

Consideremos ahora un sistema cuyo espacio de configuraciones es un Grupo de Lie G.
Sea G actuando sobre si mismo por traslación a izquierda, consideremos la acción levantada en TG y sea $L_d : TG \times TG \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano discreto G-invariante por la acción diagonal.
Podemos identificar $(TG \times TG)/G$ con $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$ mediante la aplicación cociente $\bar{\pi} : TG \times TG \to \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$, donde

$$\begin{aligned}\bar{\pi}((g_k, \dot{g}_k), (g_{k+1}, \dot{g}_{k+1})) &= (g_k^{-1}\dot{g}_k, g_k^{-1}g_{k+1}, g_{k+1}^{-1}\dot{g}_{k+1}) \\ &= (\xi_k, W_k, \xi_{k+1})\end{aligned}$$

Esto induce un Lagrangiano discreto reducido $\ell_d\colon \mathfrak{g}\times G\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ mediante $\ell_d\circ\bar{\pi}=L_d$. Esto es:

$$L_d((g_k,\dot{g}_k),(g_{k+1},\dot{g}_{k+1}))=\ell_d(\xi_k,W_k,\xi_{k+1})$$

Notar que ℓ_d está bien definida.

Luego si

$$\mathbb{S}_d((g_0, \dot{g}_0), ..., (g_N, \dot{g}_N)) = \sum_{k=0}^{N-1} L_d((g_k, \dot{g}_k), (g_{k+1}, \dot{g}_{k+1}))$$

entonces podemos expresar la acción discreta reducida de la siguiente manera:

$$s_d = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_d(\xi_k, W_k, \xi_{k+1})$$

donde $\gamma_k = (\xi_k, W_k, \xi_{k+1}) \in \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$, con $0 \leq k \leq N-1$.

Ecuaciones discretas reducidas

Que $\{(g_k, \dot{g}_k)\}_{k=0}^N$ satisfaga el principio variacional $\delta \mathbb{S}_d = 0$ con extremos fijos $(g_0, \dot{g}_0)$ y $(g_N, \dot{g}_N)$ es equivalente a que $\{\gamma_k = (\xi_k, W_k, \xi_{k+1})\}_{k=1}^N$ sea tal que $(\xi_0, ..., \xi_{N-1}, W_0, ..., W_N)$ es extremo de s_d para variaciones arbitrarias $\delta\xi_k$ con $\delta\xi_0 = 0$, $\delta\xi_N = 0$ y $\delta W_k = -TR_{W_k}\eta_k + TL_{W_k}\eta_{k+1}$ donde $\eta_k \in \mathfrak{g}$ es arbitrario, $\eta_0 = 0$ y $\eta_N = 0$.

Ecuaciones Reducidas

Luego, buscando los puntos críticos de δs_d, se deducen las siguientes ecuaciones:

$$D_3\ell_d(\gamma_k) + D_1\ell_d(\gamma_{k+1}) = 0 \tag{3a}$$

$$D_2\ell_d(\gamma_k) \circ TL_{W_k} - D_2\ell_d(\gamma_{k+1}) \circ TR_{W_{k+1}} = 0 \tag{3b}$$

con $0 \leq k \leq N-1$.
Resultan ser ec. de Euler-Lagrange discretas (DEL) (3a) acopladas con ec. de Euler-Poincaré discretas (DEP) (3b).

Reducción en términos de Grupoides de Lie

Tenemos definido ℓ_d en $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$, podemos considerar entonces el Grupoide de Lie $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g} \rightrightarrows \mathfrak{g}$ donde G es Grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su Álgebra de Lie asociada.

Este grupoide tiene:

- $\mathfrak{g}$ como variedad base

Reducción en términos de Grupoides de Lie

Tenemos definido ℓ_d en $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$, podemos considerar entonces el Grupoide de Lie $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g} \rightrightarrows \mathfrak{g}$ donde G es Grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su Álgebra de Lie asociada.
Este grupoide tiene:

- $\mathfrak{g}$ como variedad base
- Las aplicaciones submersivas $\alpha, \beta : \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (*source* y *target*) tales que

  $$\alpha = pr_1 \text{ y } \beta = pr_3$$

  Si representamos al elemento γ del grupoide por una flecha

  $$\xi \xrightarrow{\gamma} \eta \qquad \alpha(\gamma) = \xi \text{ y } \beta(\gamma) = \eta$$

Reducción en términos de Grupoides de Lie

Tenemos definido ℓ_d en $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$, podemos considerar entonces el Grupoide de Lie $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g} \rightrightarrows \mathfrak{g}$ donde G es Grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su Álgebra de Lie asociada.
Este grupoide tiene:

- $\mathfrak{g}$ como variedad base
- Las aplicaciones submersivas $\alpha, \beta : \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (*source* y *target*) tales que
$$\alpha = pr_1 \text{ y } \beta = pr_3$$
Si representamos al elemento γ del grupoide por una flecha
$$\xi \xrightarrow{\gamma} \eta \qquad \alpha(\gamma) = \xi \text{ y } \beta(\gamma) = \eta$$
- Una composición $m : G_2 \to \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$ donde $G_2 = \{(\gamma_1, \gamma_2) \subseteq (\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g})^2 : \beta(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)\}$ y tal que
$$m(\gamma_1, \gamma_2) = (\xi_1, g, \xi_2).(\xi_2, h, \xi_3) = (\xi_1, g.h, \xi_3)$$

Reducción en términos de Grupoides de Lie

- Una sección identidad $\epsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$ tal que
$$\epsilon(\xi) = (\xi, e, \xi)$$

- Una sección identidad $\epsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$ tal que
$$\epsilon(\xi) = (\xi, e, \xi)$$
- Una inversión $i : \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$ tal que
$$i(\xi_1, g, \xi_2) = (\xi_2, g^{-1}, \xi_1)$$

Problema con condiciones de borde:

Encontrar una secuencia componible $\{\gamma_k\}_{k=1}^{N}$ en $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$ tal que las Ec. discretas reducidas (3a) y (3b) se verifiquen para todo $k = 1...N$ y el producto final $\gamma_1...\gamma_N = \Gamma$ sea un elemento dado del grupoide $\mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$.

Geometría de $\mathsf{SE}(3)$

Consideremos el sistema mecánico consistente en un cuerpo rígido cuyo espacio de configuración es: $\mathsf{SE}(3)$.

- $G = \mathsf{SE}(3)$
  Este espacio se puede representar por matrices de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

$R \in \mathsf{SO}(3)$, $w \in \mathbb{R}^3$

Geometría de $\mathsf{SE}(3)$

Consideremos el sistema mecánico consistente en un cuerpo rígido cuyo espacio de configuración es: $\mathsf{SE}(3)$.

- $G = \mathsf{SE}(3)$
  Este espacio se puede representar por matrices de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

  $R \in \mathsf{SO}(3)$, $w \in \mathbb{R}^3$

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{se}(3)$
  Este espacio se puede representar por matrices de la forma:

$$S = \begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

  $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ antisimétrica , $v \in \mathbb{R}^3$

Contexto en SE(3)

- Identificación:
  $\mathbb{R}^6 \simeq \mathfrak{se}(3)$ vía la aplicación

$$(x, y, z, a, b, c) \longmapsto \begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -z & y & a \\ z & 0 & -x & b \\ -y & x & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Identificación:
  $\mathbb{R}^6 \simeq \mathfrak{se}(3)$ vía la aplicación

$$(x, y, z, a, b, c) \longmapsto \begin{bmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -z & y & a \\ z & 0 & -x & b \\ -y & x & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Retracción $\tau : \mathfrak{g} \to G$ difeomorfismo local
  Tomamos $\tau = Cay_4 : \mathfrak{se}(3) \to \mathsf{SE}(3)$ donde:

$$Cay_4(S) = \left(I_4 - \frac{1}{2}S\right)^{-1}\left(I_4 + \frac{1}{2}S\right)$$

.

Sea $L : TG \to \mathbb{R}$ invariante a izquierda definido por:

$$L\left(\begin{bmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}tr(\dot{R}\mathbb{J}\dot{R}^T) + \frac{1}{2}m\|\dot{v}\|^2$$

El lagrangiano reducido es

$$\ell(\Omega) = \ell(\Omega_{rot}, \Omega_{tr}) = \frac{1}{2}\Omega_{rot}^T\mathbb{I}\Omega_{rot} + \frac{1}{2}m\|\Omega_{tr}\|^2$$

Para control óptimo, si $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ son controles,

$$\ell(\Omega, \dot{\Omega})) = \frac{1}{2}\|(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)\|^2$$

Nota: $\Omega = (\Omega_{rot}, \Omega_{tr}) = ((\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3), (a, b, c))$ lo consideramos un elemento de $\mathfrak{g}$

Aplicación en SE(3)

Sean I_1, I_2, I_3 los momentos de incercia, las ec de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 &= u_1 \\ I_2\dot{\Omega}_1 - (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 &= u_2 \\ I_3\dot{\Omega}_1 - (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 &= u_3 \\ \dot{a} - b\Omega_3 + c\Omega_2 &= u_4 \\ \dot{b} - c\Omega_1 + a\Omega_3 &= u_5 \\ \dot{c} - a\Omega_2 + b\Omega_1 &= u_6 \end{aligned}$$

Discretizando el sistema continuo, para ℓ_d como aproximación de la acción integral, proponemos $\ell_d : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\ell_d(\Omega_k, \xi_k, \Omega_{k+1}) = \frac{h}{2}\ell\left(\Omega_k, \frac{2}{h^2}\left[3\xi_k - h\left(2\Omega_k + d^L_{\tau^{-1}_{\xi_k}}\Omega_{k+1}\right)\right]\right) \\ + \frac{h}{2}\ell\left(\Omega_{k+1} d^L_{\tau_{\xi_k}}\left\{-\frac{2}{h^2}\left[3\xi_k - h\left(\Omega_k + 2d^L_{\tau^{-1}_{\xi_k}}\Omega_{k+1}\right)\right]\right\}\right) \\ + dd^L_{\tau_{\xi_k}}\left(d^L_{\tau^{-1}_{\xi_k}}\Omega_{k+1}, d^L_{\tau^{-1}_{\xi_k}}\Omega_{k+1}\right) \quad (5)\end{aligned}$$

Luego para resolver las ecuaciones (3a) y (3b) utilizamos el método de paralelización.

Método de paralelización

El enfoque discreto del método en grupoides consiste en empezar con una secuencia **arbitraria** componible $\{\gamma_k\}_{k=1}^N$ tal que $\gamma_1 ... \gamma_N = \Gamma$ que no necesariamente verifiquen las ec (3a) y (3b), y producir una nueva secuencia componible $\{\bar{\gamma}_k\}_{k=1}^N$ tal que $\bar{\gamma}_1 ... \bar{\gamma}_N = \Gamma$.
Esta nueva secuencia se obtiene resolviendo una versión **paralelizada** de las ecuaciones, donde para obtener $\bar{\gamma}_k$ se utiliza información de γ_{k-1} y γ_k, por lo cual se pueden resolver las ecuaciones para cada k independientemente.
Iterando el proceso se obtendrá una aproximacón de una solución de (3a) y (3b)

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\varepsilon(x_0)"'] \arrow[dr, "d_1"] & x_1 & \cdots & x_{k-1} \arrow[r, "\gamma_k"] \arrow[dr, "d_k"] & x_k \arrow[r, "\gamma_{k+1}"] \arrow[dr, "d_{k+1}"] & x_{k+1} & \cdots & x_{N-1} \arrow[r, "\gamma_N"] \arrow[dr, "d_N"] & x_N \arrow[d, "\varepsilon(x_1)"] \\
\bar{x}_0 = x_0 \arrow[r, "\bar{\gamma}_1"'] \arrow[ur, dashed, "c_1"] & \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_{k-1} \arrow[r, "\bar{\gamma}_k"'] \arrow[ur, dashed, "c_k"] & \bar{x}_k \arrow[r, "\bar{\gamma}_{k+1}"'] \arrow[ur, dashed, "c_{k+1}"] & \bar{x}_{k+1} & \cdots & \bar{x}_{N-1} \arrow[r, "\bar{\gamma}_N"'] \arrow[ur, dashed, "c_N"] & \bar{x}_N = x_N
\end{tikzcd}
$$

Cada flecha representa un elemento del grupoide. Los puntos representan el source y el target de cada elemento (cada $x_k \in \mathfrak{g}$).

Y se verifica que $x_0 = \bar{x_0}$, $x_N = \bar{x_N}$ y $\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, bend left, "\Gamma"] & x_N \end{tikzcd}$

En cada iteración para encontrar $\bar{\gamma}_k$, primero se calculan los elementos diagonales $d_k \in \mathfrak{g} \times G \times \mathfrak{g}$, $k = 1, ..., N$.
Los elementos d_k satisfacen:

1. $\alpha(d_k) = \alpha(\gamma_k)$ para $k = 1, ..., N$
2. $d_N = \gamma_N$
3. Las ecucaciones paralelizadas

Paralelización de las Ecuaciones

Ecuaciones paralelizadas

En la ecuaciones

$$
\begin{aligned}
D_1\ell_d(\gamma_{k+1}) + D_3\ell_d(\gamma_k) &= 0 \quad (3a)\\
\ell^*_{W_{k-1}} D_2\ell_d(\gamma_k) - r^*_{W_k} D_2\ell_d(\gamma_{k+1}) &= 0 \quad (3b)
\end{aligned}
$$

con $1 \leq k \leq N$, se reemplazan los elementos γ_k y γ_{k+1} por d_k y c_k, donde $c_{k+1} = (d_k)^{-1}.\gamma_k.\gamma_{k+1}$ para $k = 1, ..., N-1$ y $c_1 = \gamma_1$.

$$
\begin{tikzcd}
x_{k-1} \arrow[r, "\gamma_k"] \arrow[dr, "d_k"] & x_k \arrow[r, "\gamma_{k+1}"] & x_{k+1} \\
& \bar{x}_k \arrow[ur, dashed, "c_{k+1}"] &
\end{tikzcd}
$$

Paralelización de las Ecuaciones

$$\gamma_k = (\xi_k, W_k, \xi_{k+1})$$

$$d_k = (\xi_k, Z_k, \bar{\xi}_{k+1})$$

$$c_k = d_{k-1}^{-1}.\gamma_{k-1}.\gamma_k = (\bar{\xi}_k, Z_{k-1}^{-1} W_{k-1} W_k, \xi_{k+1})$$

$$\begin{aligned} D_1\ell_d(c_k) + D_3\ell_d(d_k) &= 0 \\ \ell^*_{Z_{k-1}} D_2\ell_d(d_k) - r^*_{Z_{k-1}^{-1} W_{k-1} W_k} D_2\ell_d(c_k) &= 0 \end{aligned}$$

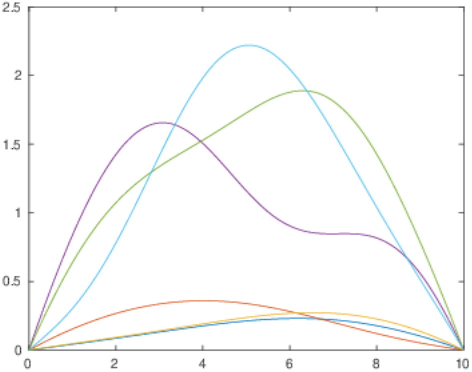
Datos conocidos $\alpha(d_k)$ $\beta(c_k)$

Luego, la secuencia $\{\bar{\gamma}_k\}_{k=1}^{N}$ es definida por:

- $\bar{\gamma}_1 = d_1$
- $\bar{\gamma}_k = d_{k-1}^{-1}.\gamma_{k-1}.d_k \quad$ para $k = 2, ..., N$

Notar que $\bar{\gamma}_1...\bar{\gamma}_N = \Gamma$

Simulaciones



Las tres curvas más altas corresponden a las componentes de traslación Ω_{tr}, y las tres más bajas a las componentes de rotación Ω_{rot}.

Muchas gracias