Espectro del Laplaciano en 3-esferas homogéneas

Emilio Lauret
INMABB, CONICET y Universidad Nacional del Sur

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro, Bahía Blanca, Junio 2019.

Variedades Riemannianas homogéneas

Sea (M, g) una variedad Riemanniana

Variedades Riemannianas homogéneas

Sea (M, g) una variedad Riemanniana i.e. un producto interno en cada espacio tangente T_pM de la variedad diferenciable M que permite calcular distancia de curvas $\int_a^b \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle_p^{1/2} dt$, se obtiene un espacio métrico (M, d_g), induce distintas nociones de curvatura, etc.

Variedades Riemannianas homogéneas

Sea (M, g) una variedad Riemanniana i.e. un producto interno en cada espacio tangente T_pM de la variedad diferenciable M que permite calcular distancia de curvas $\int_a^b \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle_p^{1/2} dt$, se obtiene un espacio métrico (M, d_g), induce distintas nociones de curvatura, etc.

(M, g) se dice homogénea si su grupo de isometrías actúa transitivamente.

Variedades Riemannianas homogéneas

Sea (M, g) una variedad Riemanniana i.e. un producto interno en cada espacio tangente T_pM de la variedad diferenciable M que permite calcular distancia de curvas $\int_a^b \langle \sigma'(t), \sigma'(t)\rangle_p^{1/2} dt$, se obtiene un espacio métrico (M, d_g), induce distintas nociones de curvatura, etc.

(M, g) se dice homogénea si su grupo de isometrías actúa transitivamente.

Ejemplo: (S^n, can) = esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$, tiene grupo de isometrías isomorfo a $\mathrm{O}(n+1)$, y $g \mapsto ge_{n+1}$ de $\mathrm{O}(n+1)$ a S^n es sobre.

Variedades Riemannianas homogéneas

Sea (M, g) una variedad Riemanniana i.e. un producto interno en cada espacio tangente T_pM de la variedad diferenciable M que permite calcular distancia de curvas $\int_a^b \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle_p^{1/2} dt$, se obtiene un espacio métrico (M, d_g), induce distintas nociones de curvatura, etc.

(M, g) se dice homogénea si su grupo de isometrías actúa transitivamente.

Ejemplo: $(S^n, \mathrm{can}) =$ esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$, tiene grupo de isometrías isomorfo a $\mathrm{O}(n+1)$, y $g \mapsto ge_{n+1}$ de $\mathrm{O}(n+1)$ a S^n es sobre.

Geométricamente, una variedad Riemanniana homogénea tiene todos sus puntos iguales.

3-esfera

A partir de ahora nos concentraremos con S^3

3-esfera

A partir de ahora nos concentraremos con S^3, la cual es difeomorfa a

$$G := \mathrm{SU}(2) = \{a \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) : a^* a = \bar{a}^t a = I_2,\ \det(a) = 1\}.$$

3-esfera

A partir de ahora nos concentraremos con S^3, la cual es difeomorfa a

$$G := \mathrm{SU}(2) = \{a \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) : a^* a = \bar{a}^t a = I_2, \det(a) = 1\}.$$

Éste es un grupo de Lie compacto, simple, y no conmutativo.

3-esfera

A partir de ahora nos concentraremos con S^3, la cual es difeomorfa a

$$G := \mathrm{SU}(2) = \{a \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) : a^* a = \bar{a}^t a = I_2,\ \det(a) = 1\}.$$

Éste es un grupo de Lie compacto, simple, y no conmutativo.

El espacio tangente de $\mathrm{SU}(2)$ en I_2 se identifica con su álgebra de Lie

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) : X^* + X = 0,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\},$$

la cual tiene la $\mathbb{R}$-base

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Métricas invariantes a izquierda en SU(2)

Una métrica Riemanniana homogénea g en $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ determina y está determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{su}(2)$.

Métricas invariantes a izquierda en SU(2)

Una métrica Riemanniana homogénea g en $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ determina y está determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{su}(2)$.

- g restringida a $T_e\,\mathrm{SU}(2) = \mathfrak{su}(2)$ da $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Métricas invariantes a izquierda en SU(2)

Una métrica Riemanniana homogénea g en $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ determina y está determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{su}(2)$.

- g restringida a $T_e\,\mathrm{SU}(2) = \mathfrak{su}(2)$ da $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- dado $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definimos g en $T_a\,\mathrm{SU}(2)$ por

$$g(X, Y) = \langle dL_{a^{-1}} X, dL_{a^{-1}} Y \rangle \qquad \text{para } X, Y \in T_a\,\mathrm{SU}(2).$$

Aquí, $L_a : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)$, $L_a(b) = ab$.

Métricas invariantes a izquierda en SU(2)

Una métrica Riemanniana homogénea g en $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ determina y está determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{su}(2)$.

- g restringida a $T_e\,\mathrm{SU}(2) = \mathfrak{su}(2)$ da $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- dado $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definimos g en $T_a\,\mathrm{SU}(2)$ por

$$g(X, Y) = \langle dL_{a^{-1}}X, dL_{a^{-1}}Y \rangle \qquad \text{para } X, Y \in T_a\,\mathrm{SU}(2).$$

Aquí, $L_a : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)$, $L_a(b) = ab$. Se tiene que L_a es una isometría de (S^3, g) para todo a.

Métricas invariantes a izquierda en SU(2)

Una métrica Riemanniana homogénea g en $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ determina y está determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{su}(2)$.

- g restringida a $T_e \,\mathrm{SU}(2) = \mathfrak{su}(2)$ da $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- dado $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definimos g en $T_a \,\mathrm{SU}(2)$ por

$$g(X, Y) = \langle dL_{a^{-1}} X, dL_{a^{-1}} Y \rangle \qquad \text{para } X, Y \in T_a \,\mathrm{SU}(2).$$

Aquí, $L_a : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)$, $L_a(b) = ab$. Se tiene que L_a es una isometría de (S^3, g) para todo a.

Aquí estamos usando la estructura de grupo de SU(2).

Clases de isometría

Para a, b, c números reales positivos, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(a,b,c)}$ el producto interno en $\mathfrak{su}(2)$ con base ortonormal $\{aX_1, bX_2, cX_3\}$.

Clases de isometría

Para a, b, c números reales positivos, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(a,b,c)}$ el producto interno en $\mathfrak{su}(2)$ con base ortonormal $\{aX_1, bX_2, cX_3\}$.

Se tiene que cualquier métrica homogénea en S^3 es isométrica a $(S^3, g_{(a,b,c)})$ con $a \geq b \geq c$.

Clases de isometría

Para a, b, c números reales positivos, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(a,b,c)}$ el producto interno en $\mathfrak{su}(2)$ con base ortonormal $\{aX_1, bX_2, cX_3\}$.

Se tiene que cualquier métrica homogénea en S^3 es isométrica a $(S^3, g_{(a,b,c)})$ con $a \geq b \geq c$.

Si $a = b = c$, entonces $(S^3, g_{(a,a,a)})$ es isométrica a la esfera redonda de radio $1/a^2$.

Clases de isometría

Para a, b, c números reales positivos, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(a,b,c)}$ el producto interno en $\mathfrak{su}(2)$ con base ortonormal $\{aX_1, bX_2, cX_3\}$.

Se tiene que cualquier métrica homogénea en S^3 es isométrica a $(S^3, g_{(a,b,c)})$ con $a \geq b \geq c$.

Si $a = b = c$, entonces $(S^3, g_{(a,a,a)})$ es isométrica a la esfera redonda de radio $1/a^2$.

Cuando $b = c$, $(S^3, g_{(a,b,b)})$ es una esfera de Berger, las cuales provienen de variar la métrica a lo largo de la fibra de la fibración de Hopf

$$S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2.$$

Operador de Laplace–Beltrami

Toda variedad Riemanniana compacta arbitraria sin borde (M, g) tiene asociado un operador diferencial distinguido:
el operador de Laplace–Beltrami $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Operador de Laplace–Beltrami

Toda variedad Riemanniana compacta arbitraria sin borde (M, g) tiene asociado un operador diferencial distinguido:
el operador de Laplace–Beltrami $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Spec(M, g): λ tal que existe $f \in C^\infty(M)$ con $\Delta f = \lambda f$;

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \to +\infty,$$

in particular la multiplicidad de un autovalor λ,
$\dim\{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda f\}$, es finita.

Operador de Laplace–Beltrami

Toda variedad Riemanniana compacta arbitraria sin borde (M, g) tiene asociado un operador diferencial distinguido: el operador de Laplace–Beltrami $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Spec(M, g): λ tal que existe $f \in C^\infty(M)$ con $\Delta f = \lambda f$;

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \to +\infty,$$

in particular la multiplicidad de un autovalor λ, $\dim\{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda f\}$, es finita.

La determinación explícita de Spec(M, g) es imposible, excepto para unos pocas variedades muy lindas.

Teorema de Peter y Weyl

Para cada k entero positivo, sean:
$V_k = \{\text{polinomios homogéneos de grado } k \text{ en las variables } x, y\}$
$\pi_k : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_k)$ la representación de SU(2) dada por
$(\pi_k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot p)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = p\begin{pmatrix} \delta x - \beta y \\ -\gamma x + \alpha y \end{pmatrix}.$

Teorema de Peter y Weyl

Para cada k entero positivo, sean:
$V_k = \{$polinomios homogéneos de grado k en las variables $x, y\}$
$\pi_k : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_k)$ la representación de $\mathrm{SU}(2)$ dada por
$\left(\pi_k \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \cdot p\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = p\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = p\left(\begin{smallmatrix} \delta x - \beta y \\ -\gamma x + \alpha y \end{smallmatrix}\right).$

Éstas son todas las representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SU}(2)$. Entonces $L^2(\mathrm{SU}(2)) \simeq \bigoplus_{k \geq 0} V_k \otimes V_k^*$

Teorema de Peter y Weyl

Para cada k entero positivo, sean:
$V_k = \{$polinomios homogéneos de grado k en las variables $x, y\}$
$\pi_k : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_k)$ la representación de SU(2) dada por
$(\pi_k \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \cdot p)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = p(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = p\left(\begin{smallmatrix} \delta x - \beta y \\ -\gamma x + \alpha y \end{smallmatrix}\right).$

Éstas son todas las representaciones unitarias irreducibles de SU(2). Entonces $L^2(\mathrm{SU}(2)) \simeq \bigoplus_{k \geq 0} V_k \otimes V_k^*$

Dados $p \otimes \varphi \in V_k \otimes V_k^*$, $\quad f_{p \otimes \varphi}(x) := \varphi(\pi(x) \cdot p)$.

Teorema de Peter y Weyl

Para cada k entero positivo, sean:
$V_k = \{$polinomios homogéneos de grado k en las variables $x, y\}$
$\pi_k : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_k)$ la representación de $\mathrm{SU}(2)$ dada por
$(\pi_k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot p)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = p \begin{pmatrix} \delta x - \beta y \\ -\gamma x + \alpha y \end{pmatrix}.$

Éstas son todas las representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SU}(2)$. Entonces $L^2(\mathrm{SU}(2)) \simeq \bigoplus_{k \geq 0} V_k \otimes V_k^*$

Dados $p \otimes \varphi \in V_k \otimes V_k^*$, $\quad f_{p \otimes \varphi}(x) := \varphi(\pi(x) \cdot p)$.

$\Delta_{(a,b,c)} \cdot f_{v \otimes \varphi} = f_{(C_k(a,b,c) \cdot v) \otimes \varphi}$ donde

$C_k(a, b, c) = -a^2 d\pi_k(X_1)^2 - b^2 d\pi_k(X_2)^2 - c^2 d\pi_k(X_3)^2 \in \mathrm{End}(V_k).$

Teorema de Peter y Weyl

Para cada k entero positivo, sean:
$V_k = \{\text{polinomios homogéneos de grado } k \text{ en las variables } x, y\}$
$\pi_k : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V_k)$ la representación de $\mathrm{SU}(2)$ dada por

$$\left(\pi_k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot p\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = p\begin{pmatrix} \delta x - \beta y \\ -\gamma x + \alpha y \end{pmatrix}.$$

Éstas son todas las representaciones unitarias irreducibles de $\mathrm{SU}(2)$. Entonces $L^2(\mathrm{SU}(2)) \simeq \bigoplus_{k \geq 0} V_k \otimes V_k^*$

Dados $p \otimes \varphi \in V_k \otimes V_k^*$, $\quad f_{p\otimes\varphi}(x) := \varphi(\pi(x) \cdot p)$.

$\Delta_{(a,b,c)} \cdot f_{v\otimes\varphi} = f_{(C_k(a,b,c)\cdot v)\otimes\varphi}$ donde

$$C_k(a,b,c) = -a^2 d\pi_k(X_1)^2 - b^2 d\pi_k(X_2)^2 - c^2 d\pi_k(X_3)^2 \in \mathrm{End}(V_k).$$

Luego, $\mathrm{Spec}(\mathrm{SU}(2), g_{(a,b,c)}) = \bigcup_{k \geq 0} \underbrace{\mathrm{Spec}(C_{(a,b,c)})}_{\text{cada uno } k+1\text{-veces}}$.

Teorema principal

$\{p_m\binom{x}{y} := x^m y^{k-m} : 0 \leq m \leq k\}$ es base de V_k.

Teorema principal

$\{p_m\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) := x^m y^{k-m} : 0 \leq m \leq k\}$ es base de V_k.

$$C_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & \\ & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2(a,b,c) = \begin{pmatrix} 4a^2+2b^2+2c^2 & 0 & 2(b^2-c^2) \\ 0 & 4b^2+4c^2 & 0 \\ 2(b^2-c^2) & 0 & 4a^2+2b^2+2c^2 \end{pmatrix}$$

Teorema principal

$\{p_m\binom{x}{y} := x^m y^{k-m} : 0 \leq m \leq k\}$ es base de V_k.

$$C_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & \\ & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2(a,b,c) = \begin{pmatrix} 4a^2+2b^2+2c^2 & 0 & 2(b^2-c^2) \\ 0 & 4b^2+4c^2 & 0 \\ 2(b^2-c^2) & 0 & 4a^2+2b^2+2c^2 \end{pmatrix}$$

Theorem (L. 2018)

$\lambda_1(\mathrm{SU}(2), g_{(a,b,c)}) = \min\{a^2+b^2+c^2,\ 4(b^2+c^2)\}$ *for* $a,b,c>0$.

Teorema principal

$\{p_m\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) := x^m y^{k-m} : 0 \leq m \leq k\}$ es base de V_k.

$$C_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & \\ & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$C_2(a,b,c) = \begin{pmatrix} 4a^2+2b^2+2c^2 & 0 & 2(b^2-c^2) \\ 0 & 4b^2+4c^2 & 0 \\ 2(b^2-c^2) & 0 & 4a^2+2b^2+2c^2 \end{pmatrix}$$

Theorem (L. 2018)

$\lambda_1(\mathrm{SU}(2), g_{(a,b,c)}) = \min\{a^2+b^2+c^2,\ 4(b^2+c^2)\}$ *for* $a, b, c > 0$.

La herramienta más importante fue el teorema del círculo de Gershgorin para estimar los autovalores de $C_k(a,b,c)$, que permitió probar que $\min\{a^2+b^2+c^2,\ 4(b^2+c^2)\}$ es menor que los autovalores de $C_k(a,b,c)$ para $k \geq 3$.

Primera consecuencia

Para g una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie compacto G,

$$\frac{\pi^2/4}{\operatorname{diam}(G,g)^2} \quad \leq \quad \lambda_1(G,g) \quad \leq \quad \frac{C_G}{\operatorname{diam}(G,g)^2}.$$

Peter Li (1980) mostró la desigualdad de la izquierda.

Eldredge, Gordina, Saloff-Coste (2017) conjeturaron la igualdad de la derecha (para algún $C_G > 0$ que depende únicamente de G).

Ellos establecieron la validez de su conjetura sólo para SU(2), dando una cota superior uniforme de la constante de duplicación de volumen (volume doubling constant).

Corollary (L. 2018)

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{diam}(\mathrm{SU}(2),g)^2} < \lambda_1(\mathrm{SU}(2),g) \leq \frac{8\pi^2}{\operatorname{diam}(\mathrm{SU}(2),g)^2}.$$

Segunda consecuencia

La expresión explícita de $\lambda_1(\mathrm{SU}(2), g_{(a,b,c)})$ permitió dar una prueba alternativa a la de Schmidt y Sutton de la rigidez global entre 3-esferas homogéneas:

> *Dos métricas homogéneas en S^3 son isospectrales si y sólo si son isométricas.*

Theorem (L. 2018)

Si dos métricas invariantes a izquierda g y g' en $\mathrm{SU}(2)$ *satisface que*

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{vol}(g) &= \mathrm{vol}(g') \\ \mathrm{Scal}(g) &= \mathrm{Scal}(g') \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\textit{(el espectro determina} \\ &\mathrm{vol}(\cdot) \textit{ y } \mathrm{Scal}(\cdot)\textit{)} \end{aligned}$$

y $\lambda_1(\mathrm{SU}(2), g) = \lambda_1(\mathrm{SU}(2), g')$ *con la misma multiplicitidad, entonces g y g' son isométricas.*

Tercera consecuencia

Cualquier variedad homogénea (M, g) tiene curvatura escalar constante, por lo que es una solución al Problema de Yamabe.

Bettiol y Piccione (2013) mostraron que

$$\frac{\mathrm{Scal}(M, g)}{\dim M - 1} < \lambda_1(M, g),$$

implica que (M, g) es una solución localmente rígida, i.e.

> *todas las otras métricas de curvatura escalar constante en la clase conforme de g deben estar suficientemente lejos de g.*

Ellos mostraron que toda esfera de Berger $(\mathrm{SU}(2), g_{(a,b,b)})$ $(a \neq b)$ es localmente rígida.

Theorem (L. 2018)

Toda métrica homogénea no redonda en S^3 es localmente rígida.