Extensiones triviales de k-álgebras de dimensión finita.

M. Andrea Gatica (1) (2), M. Valeria Hernández (2), Lucrecia Román (1), Melina Verdecchia (1).
(1) Universidad Nacional del Sur
(2) Universidad Nacional de La Pampa

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro

OBJETIVO

Describir las relaciones de la extensión trivial de un álgebra arbitraria de dimensión finita.

Extensión trivial de un álgebra de dimensión finita.

OBJETIVO

Describir las relaciones de la extensión trivial de un álgebra arbitraria de dimensión finita.

Definición

Se define la ***extensión trivial*** de un álgebra A como el producto cartesiano $A \times DA$, con el producto: $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$.

OBJETIVO

Describir las relaciones de la extensión trivial de un álgebra arbitraria de dimensión finita.

Definición

Se define la ***extensión trivial*** de un álgebra A como el producto cartesiano $A \times DA$, con el producto: $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$.

Supondremos A básica e indescomponible, es decir, $A = kQ/I$ donde Q es un carcaj finito y conexo e I es un ideal admisible.

Construcción del carcaj de $T(A)$ [FP]:
Se fija un conjunto $\mathbb{M} = \{p_1, \cdots, p_t\}$ de elementos en kQ_A tal que $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es una k - base de $\operatorname{soc} A_{A^e}$. Entonces:

Construcción del carcaj de $T(A)$ [FP]:
Se fija un conjunto $\mathbb{M} = \{p_1, \cdots, p_t\}$ de elementos en kQ_A tal que $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es una k - base de $\mathrm{soc}\ A_{A^e}$. Entonces:
$(Q_{T(A)})_0 = (Q_A)_0$

Construcción del carcaj de $T(A)$ [FP]:
Se fija un conjunto $\mathbb{M} = \{p_1, \cdots, p_t\}$ de elementos en kQ_A tal que $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es una k - base de $\mathrm{soc}\ A_{A^e}$. Entonces:
$(Q_{T(A)})_0 = (Q_A)_0$
$(Q_{T(A)})_1 = (Q_A)_1 \cup \{\beta_{p_1}, \cdots, \beta_{p_t}\}$ donde $\{\overline{p_1}, \cdots, \overline{p_t}\}$ es la k - base de $\mathrm{soc}_{A^e} A$ elegida y para cada i, β_{p_i} es una flecha de $t(p_i)$ a $s(p_i)$.

Ciclos elementales

Sea C un ciclo orientado en $kQ_{T(A)}$. Se dice que C es ***elemental*** si $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_m \cdots \alpha_{j+1}$, donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in (Q_A)_1$, $p \in \mathbb{M}$ y $\overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1}) \neq 0$. En este caso, el ***peso*** de C es $\omega(C) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1})$.

Ciclos elementales

Sea C un ciclo orientado en $kQ_{T(A)}$. Se dice que C es ***elemental*** si $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_m \cdots \alpha_{j+1}$, donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in (Q_A)_1$, $p \in \mathbb{M}$ y $\overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1}) \neq 0$. En este caso, el ***peso*** de C es $\omega(C) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1})$.

Observaciones:

$\diamond$ Si $C_1 = \alpha_m \cdots \alpha_1$ es un ciclo elemental, entonces $C_i = \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \alpha_m \cdots \alpha_i$ también lo es para cualquier $i \in \{1, \cdots, m\}$. Se dice en este caso que C_i es una permutación de C_1.

Ciclos elementales

Sea C un ciclo orientado en $kQ_{T(A)}$. Se dice que C es ***elemental*** si $C = \alpha_j \cdots \alpha_1 \beta_p \alpha_m \cdots \alpha_{j+1}$, donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in (Q_A)_1$, $p \in \mathbb{M}$ y $\overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1}) \neq 0$. En este caso, el ***peso*** de C es $\omega(C) = \overline{p}^*(\overline{\alpha_m \cdots \alpha_1})$.

Observaciones:

◇ Si $C_1 = \alpha_m \cdots \alpha_1$ es un ciclo elemental, entonces $C_i = \alpha_{i-1} \cdots \alpha_1 \alpha_m \cdots \alpha_i$ también lo es para cualquier $i \in \{1, \cdots, m\}$. Se dice en este caso que C_i es una permutación de C_1.

◇ Si un camino q está contenido en un ciclo elemental C, su ***suplemento*** en C es el camino formado por las flechas restantes de C. Si $q = C$, el suplemento de q en C es el camino trivial $e_{s(q)}$.

Extensión trivial de un álgebra de dimensión finita.

Teorema

Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra de dimensión finita. Sea I' el ideal de $kQ_{T(A)}$ generado por:

(i) I_A

(i) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $\sum_{s=1}^{l} a_s\mu_s$, donde $a_s \in K^*$ y μ_s son caminos diferentes de i a j en $(\beta_p)_{p\in\mathcal{M}}$, para $s = 1, \cdots, l$ y tales que

$$\gamma\left(\sum_{s=1}^{l} a_s\mu_s\right) \in I'_i \text{o} \left(\sum_{s=1}^{l} a_s\mu_s\right)\gamma \in I'_j,$$

para cada suplemento γ de cada uno de los $\mu_s s$.

Entonces I' es admisible e $I' = ker\Phi$. Luego $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

[FP] E. A. Fernández, M. I. Platzeck. Presentations of trivial extensions of finite dimensional algebras and a theorem of Sheila Brenner. J. Algebra 249 (2002), no. 2, 326-344.

[GHP] M. A. Gatica, M. V. Hernández y M. I. Platzeck. Trivial extensions of monomial algebras. Applications to gentle algebras and Brauer graph algebras. Enviado a Algebras and Representation Theory para su publicación.

¡Muchas gracias!