Existencia de Órbitas Periódicas en Sistemas Híbridos Reducidos

María Emma Eyrea Irazú[1]
Leonardo Jesús Colombo [2]

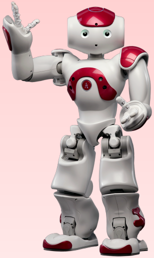
XV Congreso "Dr. Antonio Monteiro"

Bahía Blanca, 6 de Junio 2019

[1]Departamento de Matemática, UNLP, CONICET
[2]Instituto de Cs Matemáticas (ICMAT), Madrid

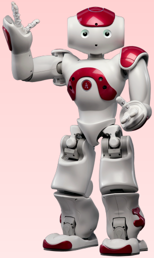
Motivación:

Entender la matemática para el andar de los robots bípedos.



Motivación:

Entender la matemática para el andar de los robots bípedos.

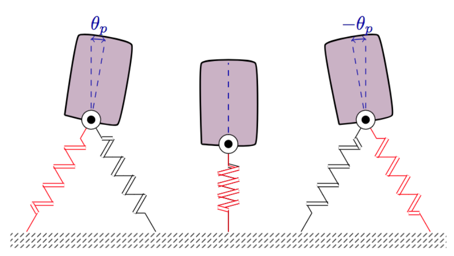


Objetivo:

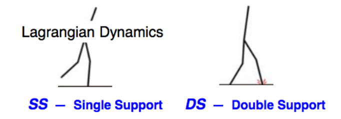
Entender las matemáticas para el balance del movimiento, donde modelos de bípedos son usados para testar los desarrollos matemáticos.

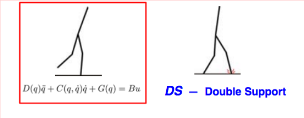
Idea principal:

Usar una combinación de simetrías discretas y contínuas en el ángulo de inclinación para motivar la interacción entre mecánica geométrica, sistemas híbridos, y modelos de robots bípedos.

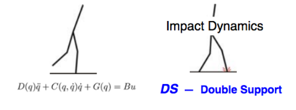


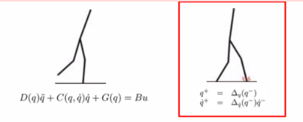
Caminata de los robots bípedos

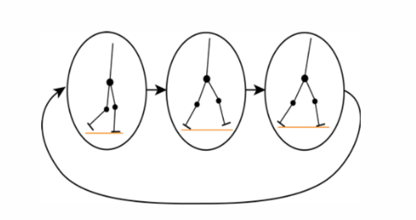




Paso de andar: Alternando las fases, SS, DS, SS, DS,...







Sistemas híbridos simples

- Sistema mecánico híbrido: sistema con dinámica contínua dado por un Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta dada por una función de impacto (inelástico).

Sistemas híbridos simples

- Sistema mecánico híbrido: sistema con dinámica contínua dado por un Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta dada por una función de impacto (inelástico).
- Sistema dinámico híbrido: combinación de dinámica contínua dada por un campo vectorial Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta.

Sistemas híbridos simples

- Sistema mecánico híbrido: sistema con dinámica contínua dado por un Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta dada por una función de impacto (inelástico).
- Sistema dinámico híbrido: combinación de dinámica contínua dada por un campo vectorial Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta.

- Ingrediente extra: simetría.

Sistemas híbridos simples

- Sistema mecánico híbrido: sistema con dinámica contínua dado por un Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta dada por una función de impacto (inelástico).
- Sistema dinámico híbrido: combinación de dinámica contínua dada por un campo vectorial Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta.

- Ingrediente extra: simetría.
- Una simetría de una función $F : D \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\phi : D \to D$ tal que $F \circ \phi = F$.

Sistemas híbridos simples

- Sistema mecánico híbrido: sistema con dinámica contínua dado por un Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta dada por una función de impacto (inelástico).
- Sistema dinámico híbrido: combinación de dinámica contínua dada por un campo vectorial Lagrangiano o Hamiltoniano y discreta.

- Ingrediente extra: simetría.
- Una simetría de una función $F : D \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\phi : D \to D$ tal que $F \circ \phi = F$.
- Punto de partida: Un Routhiano R_c^{μ} obtenido por aplicar un proceso de Reducción de Routh a un Lagrangiano $L : TD \to \mathbb{R}$.

Sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 2.1

Un **Sistema Híbrido Simple** está caracterizados por una 4-tupla $\mathcal{H} = (D, X, \mathcal{S}, \Delta)$, donde $D = Q \times S$ es una variedad diferenciable que suele denominarse *dominio*, $\mathcal{S}$ es una subvariedad embebida de D de codimensión 1 denominada *superficie de impacto*, $\Delta : \mathcal{S} \to D$ una aplicación diferenciable llamada *función de impacto* y X es un campo vectorial diferenciable en D.

Sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 2.1

Un **Sistema Híbrido Simple** está caracterizados por una 4-tupla $\mathcal{H} = (D, X, \mathcal{S}, \Delta)$, donde $D = Q \times S$ es una variedad diferenciable que suele denominarse *dominio*, $\mathcal{S}$ es una subvariedad embebida de D de codimensión 1 denominada *superficie de impacto*, $\Delta : \mathcal{S} \to D$ una aplicación diferenciable llamada *función de impacto* y X es un campo vectorial diferenciable en D.

Definición 2.2

La **dinámica del sistema híbrido simple** generado por $\mathcal{H}$ está dada por

$$\Sigma_{\mathcal{H}} = \begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)), & x^{-}(t) \notin \mathcal{S} \\ x^{+}(t) = \Delta(x^{-}(t)), & x^{-}(t) \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{1}$$

donde $x : I \subset \mathbb{R} \to D$ y x^{-}, x^{+} denotan los estados instantáneos antes y después de que la curva integral intersecte $\mathcal{S}$ (es decir que impacte a $\mathcal{S}$)

Sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 2.3

Un sistema híbrido simple $\mathcal{H} = (D, X, \mathcal{S}, \Delta)$ es un **sistema híbrido Routhiano simple** si está determinado por $\mathcal{H}^{R_c^\mu} := (TS, X_{R_c^\mu}, \mathcal{S}^\mu, \Delta^\mu)$, donde $X_{R_c^\mu} : TS \to T(TS)$ es el campo vectorial Routhiano, $\mathcal{S}^\mu$ es la superficie de impacto reducida y $\Delta^\mu : \mathcal{S}^\mu \to TS$ es la aplicación de impacto en la superficie de impacto reducida.

Sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 2.3

Un sistema híbrido simple $\mathcal{H} = (D, X, \mathcal{S}, \Delta)$ es un **sistema híbrido Routhiano simple** si está determinado por $\mathcal{H}^{R_c^\mu} := (TS, X_{R_c^\mu}, \mathcal{S}^\mu, \Delta^\mu)$, donde $X_{R_c^\mu} : TS \to T(TS)$ es el campo vectorial Routhiano, $\mathcal{S}^\mu$ es la superficie de impacto reducida y $\Delta^\mu : \mathcal{S}^\mu \to TS$ es la aplicación de impacto en la superficie de impacto reducida.

Definición 2.4

La **dinámica del sistema híbrido Routhiano simple** generado por $\mathcal{H}^{R_c^\mu}$ está dada por

$$\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}} : \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{R_c^\mu}(\gamma(t)), \text{ si } \gamma^-(t) \notin \mathcal{S}^\mu, \\ \gamma^+(t) = \Delta^\mu(\gamma^-(t)), \text{ si } \gamma^-(t) \in \mathcal{S}^\mu, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\gamma(t) = (x^a(t), \dot{x}^a(t)) \in TS$.

Sistemas híbridos Routhianos simples

Asumiremos que $\mathcal{H}^{R_c^\mu}$ satisface:

(A1) $\mathcal{S}^\mu \neq \emptyset$ y existe un subconjunto abierto $U \subset TS$ y una función diferenciable $\bar{h} : U \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S}^\mu = \{x \in U \mid \bar{h}(x) = 0\}$ con $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}^\mu$ (esto es, $\mathcal{S}^\mu$ es una subvariedad embebida de TS de co-dimensión 1).

Sistemas híbridos Routhianos simples

Asumiremos que $\mathcal{H}^{R_c^\mu}$ satisface:

(A1) $\mathcal{S}^\mu \neq \emptyset$ y existe un subconjunto abierto $U \subset TS$ y una función diferenciable $\bar{h} : U \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S}^\mu = \{x \in U \mid \bar{h}(x) = 0\}$ con $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathcal{S}^\mu$ (esto es, $\mathcal{S}^\mu$ es una subvariedad embebida de TS de co-dimensión 1).

(A2) Una trayectoria $\gamma : [0, T] \to TS$ cruza la superficie $\mathcal{S}^\mu$ en $t_i^- = \inf\{t > 0 | \gamma(t) \in \mathcal{S}^\mu\}$. Nosotros le permitimos a la trayectoria γ que no sea diferenciable pero si contínua en t_i^-. Esto es que, la velocidad antes del impacto $\dot{x}^-$ puede ser diferente a la velocidad $\dot{x}^+$ después del impacto en $\mathcal{S}^\mu$, es decir, $\dot{x}(t_i^-) \neq \dot{x}(t_i^+)$.

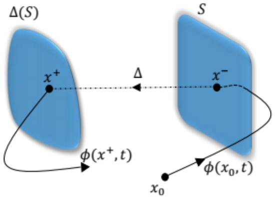
Definición 2.5

Una **solución** para un sistena híbrido Routhiano $\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}}$ es una curva $\gamma : [t_0, t_f) \to TS$, $t_f \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $t_f > t_0$, única para una condición inicial dada, que depende continuamente de ellla, satisfaciendo **A2**, y tal que:

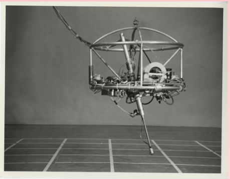
(i) $\gamma(t)$ es contínua a derecha en $[t_0, t_f)$,

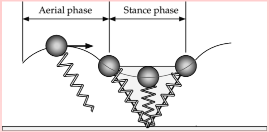
(ii) los límites a izquierda y derecha, denotados por $\gamma^-(t)$ y $\gamma^+(t)$, respectivamente, existen en cada punto $t \in (t_0, t_f)$,

(iii) existe un subconjunto cerrado y discreto $\mathcal{I} \subset [t_0, t_f)$, los **tiempos de impacto**, tal que, para cada $t \notin \mathcal{I}$, $\gamma(t)$ es diferenciable, $\dot{\gamma}(t) = X_{R_c^\mu}(\gamma(t))$, y $\gamma(t) \notin \mathcal{S}^\mu$; y para $t \in \mathcal{I}$, $\gamma^-(t) \in \mathcal{S}^\mu$ y $\gamma^+(t) = \Delta^\mu(\gamma^-(t))$.



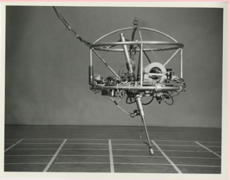
Ejemplo de un Sistema híbrido Routhiano simple: Robot saltarín

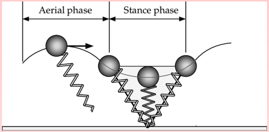




1. Sea $Q = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ el espacio de configuraciones del sistema.

Ejemplo de un Sistema híbrido Routhiano simple: Robot saltarín

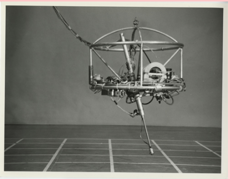


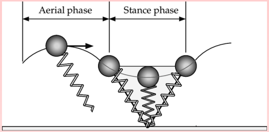


1. Sea $Q = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ el espacio de configuraciones del sistema.
2. El Lagrangiano que describe el cambio de fases está dado por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \xi^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - (mg\xi\cos\varphi + V(\xi)).$$

Ejemplo de un Sistema híbrido Routhiano simple: Robot saltarín



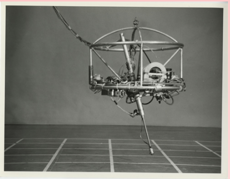


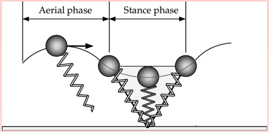
1. Sea $Q = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ el espacio de configuraciones del sistema.
2. El Lagrangiano que describe el cambio de fases está dado por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - (mg\xi \cos\varphi + V(\xi)).$$

3. La superficie de impacto está dada por $\mathcal{S} = \{x \in TQ | \xi = l_0\}$.

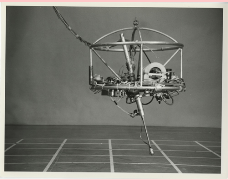
Ejemplo de un Sistema híbrido Routhiano simple: Robot saltarín

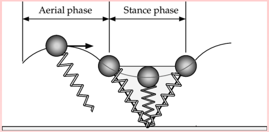




1. Sea $Q = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ el espacio de configuraciones del sistema.
2. El Lagrangiano que describe el cambio de fases está dado por
$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - (mg\xi \cos\varphi + V(\xi)).$$
3. La superficie de impacto está dada por $\mathcal{S} = \{x \in TQ | \xi = l_0\}$.
4. La aplicación de impacto está dada por $\Delta(x^-, y^-, \theta^-, \dot{x}^-, \dot{y}^-, \dot{\theta}^-) = (-l_0\varphi_0, l_0 \cos\varphi_0, -\theta^-, \dot{x}^-, -\dot{y}^-, -\dot{\theta}^-)$.

Ejemplo de un Sistema híbrido Routhiano simple: Robot saltarín





1. Sea $Q = (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ el espacio de configuraciones del sistema.
2. El Lagrangiano que describe el cambio de fases está dado por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - (mg\xi \cos\varphi + V(\xi)).$$

3. La superficie de impacto está dada por $\mathcal{S} = \{x \in TQ | \xi = l_0\}$.
4. La aplicación de impacto está dada por $\Delta(x^-, y^-, \theta^-, \dot{x}^-, \dot{y}^-, \dot{\theta}^-) = (-l_0\varphi_0, l_0 \cos\varphi_0, -\theta^-, \dot{x}^-, -\dot{y}^-, -\dot{\theta}^-)$.
5. El Routhiano $R_c^\mu : T(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ está dado por

$$R_c^\mu(\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \xi^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\mu^2}{2I} - mg\xi \cos\varphi - V(\xi).$$

Ejemplo: Robot saltarín

1. Las ecuaciones de Routh para R_c^{μ} están dadas por

$$\ddot{\xi} = \xi\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{\xi}\varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}$$

Ejemplo: Robot saltarín

1. Las ecuaciones de Routh para R_c^{μ} están dadas por

$$\ddot{\xi} = \xi\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{\xi}\varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}$$

2. El campo vectorial Routhiano

$$X_{R_c^{\mu}}(s) = \left(s, \dot{\xi}, \dot{\varphi}, \xi\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{g}{\xi}\varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}\right)^T,$$

donde $s(t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t), \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in T(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$.

Ejemplo: Robot saltarín

1. Las ecuaciones de Routh para R_c^μ están dadas por

$$\ddot{\xi} = \xi\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{\xi}\varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}$$

2. El campo vectorial Routhiano

$$X_{R_c^\mu}(s) = \left(s, \dot{\xi}, \dot{\varphi}, \xi\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi - \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{g}{\xi}\varphi - \frac{2\dot{\varphi}\dot{\xi}}{\xi}\right)^T,$$

donde $s(t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t), \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in T(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$.

3. El sistema híbrido Routhiano simple $\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}}$ está dado por

$$\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}} : \begin{cases} \dot{s}(t) = X_{R_c^\mu}(s(t)), \text{ si } s^-(t) \notin \mathcal{S}^\mu, \\ s^+(t) = \Delta^\mu(s^-(t)), \text{ si } s^-(t) \in \mathcal{S}^\mu, \end{cases} \tag{3}$$

donde

$$\mathcal{S}^\mu = \{(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \dot{\varphi}) \in T(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1) | \xi = l_0\}$$

y

$$\Delta^\mu(x^-, y^-, \dot{x}^-, \dot{y}^-) = (-l_0\varphi_0, l_0\cos\varphi_0, \dot{x}^-, -\dot{y}^-).$$

Simetría tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 3.1

Un difeomorfismo $\mathcal{R} : TS \to TS$ es llamado **simetría tiempo reversible** para el campo vectorial de Routh $X_{R_c^\mu}$ con Routhiano $R_c^\mu : TS \to \mathbb{R}$ si $\mathcal{R}$ es una involución, esto es $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = Id$, y satisface

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt}(\gamma(t)) = -X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma(t))), \qquad (4)$$

es decir, el campo vectorial de Routh satisface
$X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(q, \dot{q})) = -d\mathcal{R}(q, \dot{q}) \cdot X_{R_c^\mu}(q, \dot{q})$.

Simetría tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 3.1

Un difeomorfismo $\mathcal{R} : TS \to TS$ es llamado **simetría tiempo reversible** para el campo vectorial de Routh $X_{R_c^\mu}$ con Routhiano $R_c^\mu : TS \to \mathbb{R}$ si $\mathcal{R}$ es una involución, esto es $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = Id$, y satisface

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt}(\gamma(t)) = -X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma(t))), \qquad (4)$$

es decir, el campo vectorial de Routh satisface
$X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(q, \dot{q})) = -d\mathcal{R}(q, \dot{q}) \cdot X_{R_c^\mu}(q, \dot{q})$.
Al campo vectorial de Routh que satisface ésta condición lo llamamos **campo vectorial de Routh reversible** sobre la simetría tiempo reversible $\mathcal{R}$.

Simetría tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 3.1

Un difeomorfismo $\mathcal{R} : TS \to TS$ es llamado **simetría tiempo reversible** para el campo vectorial de Routh $X_{R_c^\mu}$ con Routhiano $R_c^\mu : TS \to \mathbb{R}$ si $\mathcal{R}$ es una involución, esto es $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = Id$, y satisface

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt}(\gamma(t)) = -X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma(t))), \tag{4}$$

es decir, el campo vectorial de Routh satisface
$X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(q, \dot{q})) = -d\mathcal{R}(q, \dot{q}) \cdot X_{R_c^\mu}(q, \dot{q})$.
Al campo vectorial de Routh que satisface ésta condición lo llamamos **campo vectorial de Routh reversible** sobre la simetría tiempo reversible $\mathcal{R}$.

"J. S. W. Lamb and J. A. G. Roberts, Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey, Phys. D 112 (1998), 1–39."

Simetría tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Definición 3.1

Un difeomorfismo $\mathcal{R} : TS \to TS$ es llamado **simetría tiempo reversible** para el campo vectorial de Routh $X_{R_c^\mu}$ con Routhiano $R_c^\mu : TS \to \mathbb{R}$ si $\mathcal{R}$ es una involución, esto es $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = Id$, y satisface

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt}(\gamma(t)) = -X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(\gamma(t))), \tag{4}$$

es decir, el campo vectorial de Routh satisface
$X_{R_c^\mu}(\mathcal{R}(q, \dot{q})) = -d\mathcal{R}(q, \dot{q}) \cdot X_{R_c^\mu}(q, \dot{q})$.
Al campo vectorial de Routh que satisface ésta condición lo llamamos **campo vectorial de Routh reversible** sobre la simetría tiempo reversible $\mathcal{R}$.

"J. S. W. Lamb and J. A. G. Roberts, Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey, Phys. D 112 (1998), 1–39."

Remark 3.2

Notar que el nombre "tiempo reversible" está dado por el hecho de que la ecuación (4) puede ser escrita como $\mathcal{R} \circ X^t_{R_c^\mu} = X^{-t}_{R_c^\mu} \circ \mathcal{R}$, donde $-t$ significa el tiempo reversible del campo vectorial $X^t_{R_c^\mu}$.

Simetrías de tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Proposición 3.3

Consideremos una simetría de tiempo reversible $\mathcal{R}$ para $X_{R_c^\mu}$. Si γ^* es un punto fijo de $\mathcal{R}$ y $\gamma(0) = \gamma^*$ para γ una curva integral de $X_{R_c^\mu}$ pasando por γ^*, entonces $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Simetrías de tiempo reversible para sistemas híbridos Routhianos simples

Proposición 3.3

Consideremos una simetría de tiempo reversible $\mathcal{R}$ para $X_{R_c^\mu}$. Si γ^* es un punto fijo de $\mathcal{R}$ y $\gamma(0) = \gamma^*$ para γ una curva integral de $X_{R_c^\mu}$ pasando por γ^*, entonces $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Teorema 3.4

Sea $R_c^\mu : TS \to \mathbb{R}$ una aplicación Routhiana invariante bajo la aplicación $\mathcal{R} : TS \to TS$,

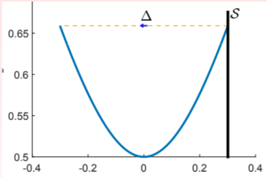
$$\mathcal{R}(q(t), \dot{q}(t)) = (F(q(t)), -dF(q) \cdot \dot{q}(t)) \tag{5}$$

con $F : Q \to Q$ una involución diferenciable. Si $\gamma^* = (q^*, \dot{q}^*)$ es un punto fijo de $\mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R}(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. En particular $F(q(t)) = q(-t)$.

Existencia de órbitas periódicas

Teorema 3.5

Sea $\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}}$ un sistema híbrido dinámico Rouhtiano simple, con Routhiano $R_c^\mu : TS \to \mathbb{R}$ invariante bajo $\mathcal{R} : TS \to TS$ definido como en (5). Si γ^* es un punto fijo de $\mathcal{R}$, γ cruza la superficie de impacto $\mathcal{S}$ en $t_i^- = \inf\{t > 0 | \gamma(t) \in \mathcal{S}\}$ y la aplicación de impacto está definida como $\Delta(\gamma^-(t_i)) = \mathcal{R}(\gamma^-(t_i))$ entonces $\gamma(t)$ es una solución periódica para $\Sigma_{\mathcal{H}^{R_c^\mu}}$ con período $2t_i^-$.



Existencia de órbitas periódicas

Ejemplo 3.6

Consideremos

1. La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ como $F(\xi, \varphi) = (\xi, -\varphi)$ que es una involución diferenciable.

Existencia de órbitas periódicas

Ejemplo 3.6

Consideremos

- La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ como $F(\xi, \varphi) = (\xi, -\varphi)$ que es una involución diferenciable.
- Podemos contruir la aplicación de simetría $\mathcal{R} : T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \to T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ usando (5) como
$$\mathcal{R}(\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) = (\xi, -\varphi, -\dot{\xi}, \dot{\varphi}).$$

Existencia de órbitas periódicas

Ejemplo 3.6

Consideremos

1. La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ como $F(\xi, \varphi) = (\xi, -\varphi)$ que es una involución diferenciable.
2. Podemos contruir la aplicación de simetría $\mathcal{R} : T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \to T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ usando (5) como
$$\mathcal{R}(\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) = (\xi, -\varphi, -\dot{\xi}, \dot{\varphi}).$$
3. Los puntos fijos de $\mathcal{R}$ están dados por $\gamma^* = (\xi^*, 0, 0, \dot{\varphi}^*)$, para un ξ^* y $\dot{\varphi}^*$.

Existencia de órbitas periódicas

Ejemplo 3.6

Consideremos

1. La función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ como $F(\xi, \varphi) = (\xi, -\varphi)$ que es una involución diferenciable.
2. Podemos contruir la aplicación de simetría $\mathcal{R} : T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1) \to T(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ usando (5) como
$$\mathcal{R}(\xi, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\varphi}) = (\xi, -\varphi, -\dot{\xi}, \dot{\varphi}).$$
3. Los puntos fijos de $\mathcal{R}$ están dados por $\gamma^* = (\xi^*, 0, 0, \dot{\varphi}^*)$, para un ξ^* y $\dot{\varphi}^*$.
4. Sea t_i^- los puntos donde γ cruza la superficie de impacto S^μ y definiendo $\Delta^\mu(t_i^-) = \Delta^\mu(\xi^-, \varphi^-, \dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-) = \mathcal{R}(\xi^-, \varphi^-, \dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-) = (l_0, -\varphi_0, -\dot{\xi}^-, \dot{\varphi}^-)$.

Existencia de órbitas periódicas

Ejemplo 3.6

Consideremos

1. La función $F:\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ como $F(\xi,\varphi)=(\xi,-\varphi)$ que es una involución diferenciable.
2. Podemos contruir la aplicación de simetría $\mathcal{R}:T(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)\to T(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1)$ usando (5) como
$$\mathcal{R}(\xi,\varphi,\dot{\xi},\dot{\varphi})=(\xi,-\varphi,-\dot{\xi},\dot{\varphi}).$$
3. Los puntos fijos de $\mathcal{R}$ están dados por $\gamma^*=(\xi^*,0,0,\dot{\varphi}^*)$, para un ξ^* y $\dot{\varphi}^*$.
4. Sea t_i^- los puntos donde γ cruza la superficie de impacto S^μ y definiendo $\Delta^\mu(t_i^-)=\Delta^\mu(\xi^-,\varphi^-,\dot{\xi}^-,\dot{\varphi}^-)=\mathcal{R}(\xi^-,\varphi^-,\dot{\xi}^-,\dot{\varphi}^-)=$ $(l_0,-\varphi_0,-\dot{\xi}^-,\dot{\varphi}^-)$.

Por lo tanto, por el Teorema 3.5, existe una solución periódica del sistema híbrido Routhiano reducido determinado por R_c^μ y Δ^μ para el robot hopper 2D, con período $2t_i^-$.

Otros estudios y Trabajo a futuro

- También estudiamos la estabilidad de las órbitas periódicas utilizando la aplicación de Poincaré en término de los autovalores de su linealización en los puntos fijos del sistema, y aplicaciones a sistemas de control infractuados.
- En un futuro queremos extender estos resultados al contexto de "funcional reducción" y estudiar sistemas más complejos, como robots bipedos en 3D, en lugar del modelo 2 dimensional del robot saltarin.

Leonardo Jesus Colombo, Eyrea Irazú María Emma, Symmetries and periodic orbits in simple hybrid Routhian systems. Submitido, Marzo 2019.

MUCHAS GRACIAS