Problema variacional de Griffiths para gravedad métrico-afín

S. Capriotti[1]

[1]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina y CONICET

Trabajo conjunto con Narciso Román-Roy, Jordi Gaset (UPC) y Leandro Salomone (UNLP)

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, 2019

La comunicación

Donde andamos...

Versiones para RG (Hehl y col. 1995)

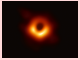
Relatividad General

- Einstein-Hilbert
  - Métrica
  - Tensor de curvatura $\Rightarrow$ Acción de Einstein-Hilbert
  - Geodésicas $\Rightarrow$ Órbitas de partículas
- Palatini
  - Bases ortogonales
  - Formas de conexión y curvatura $\Rightarrow$ Acción de Palatini
  - Geodésicas $\Rightarrow$ Órbitas de partículas

Versiones para RG (Hehl y col. 1995)

Relatividad General

Einstein-Hilbert

- Métrica
- Tensor de curvatura $\Rightarrow$ Acción de Einstein-Hilbert
- Geodésicas $\Rightarrow$ Órbitas de partículas
- 

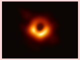
Palatini

- Bases ortogonales
- Formas de conexión y curvatura $\Rightarrow$ Acción de Palatini
- Geodésicas $\Rightarrow$ Órbitas de partículas

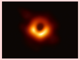
Versiones para RG (Hehl y col. 1995)

Relatividad General

Einstein-Hilbert

- Métrica
- Tensor de curvatura $\Rightarrow$ Acción de Einstein-Hilbert
- Geodésicas $\Rightarrow$ Órbitas de partículas
- 

Palatini

- Bases ortogonales
- Formas de conexión y curvatura $\Rightarrow$ Acción de Palatini
- Geodésicas $\Rightarrow$ Órbitas de partículas
- 

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, \cdots, 1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente

$$C(LM) := J^1\tau / GL(n)$$

  es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(n)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^* \widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j_x^1 s} := \theta^1|_{j_x^1 s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j_x^1 s}$ y $s(x) = \tau_{10}(j_x^1 s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces

$$\theta_{ij}|_{j_x^1 s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner \, \eta|_{j_x^1 s}\right).$$

- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente
$$C(LM) := J^1\tau / GL(n)$$
es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(n)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^*\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j^1_x s} := \theta^1\big|_{j^1_x s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j^1_x s}$ y $s(x) = \tau_{10}(j^1_x s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces
$$\theta_{ij}\big|_{j^1_x s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner\, \eta|_{j^1_x s}\right).$$
- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente

$$C(LM) := J^1\tau/GL(n)$$

  es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C(LM)\times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(n)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^*\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j_x^1 s} := \theta^1|_{j_x^1 s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j_x^1 s}$ y $s(x) = \tau_{10}(j_x^1 s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces

$$\theta_{ij}|_{j_x^1 s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner\, \eta|_{j_x^1 s}\right).$$

- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il}\wedge\Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k\wedge\theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente
$$C(LM) := J^1\tau / GL(n)$$
es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
    - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(n)\right)$ *conexión canónica*, y
    - $\theta := \tau_{10}^*\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j^1_x s} := \theta^1|_{j^1_x s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j^1_x s}$ y $s(x) = \tau_{10}(j^1_x s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces
$$\theta_{ij}|_{j^1_x s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner \eta|_{j^1_x s}\right).$$
- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \mathrm{diag}\,(-1, 1, \cdots, 1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente

$$C(LM) := J^1\tau / GL(n)$$

  es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(n)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^*\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j^1_x s} := \theta^1|_{j^1_x s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j^1_x s}$ y $s(x) = \tau_{10}(j^1_x s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces

$$\theta_{ij}|_{j^1_x s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner\, \eta|_{j^1_x s}\right).$$

- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \mathrm{diag}\,(-1, 1, \cdots, 1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente
$$C\,(LM) := J^1\tau / GL\,(n)$$
es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C\,(LM) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}\,(n)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^*\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1\,(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j_x^1 s} := \theta^1\big|_{j_x^1 s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j_x^1 s}$ y $s\,(x) = \tau_{10}\,(j_x^1 s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces
$$\theta_{ij}\big|_{j_x^1 s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner\, \eta|_{j_x^1 s}\right).$$
- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \mathrm{diag}\left(-1, 1, \cdots, 1\right) \in M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente
$$C\left(LM\right) := J^1\tau / GL\left(n\right)$$
es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C\left(LM\right) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}\left(n\right)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^* \widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(LM, \mathbb{R}^n\right)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j_x^1 s} := \theta^1\big|_{j_x^1 s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j_x^1 s}$ y $s\left(x\right) = \tau_{10}\left(j_x^1 s\right) = \left(X_1, \cdots, X_n\right)$, entonces
$$\theta_{ij}\big|_{j_x^1 s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner\, \eta|_{j_x^1 s}\right).$$
- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Definiciones (Castrillón López y Muñoz Masqué 2001)

- Sea $\eta = \operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- Sea $\tau : LM \to M$ el fibrado de bases. El cociente

$$C(LM) := J^1\tau / GL(n)$$

  es el *fibrado de conexiones*.
- Espacio total: $J^1\tau \simeq C(LM) \times_M LM$.
- Dos formas canónicas:
  - $\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(n)\right)$ *conexión canónica*, y
  - $\theta := \tau_{10}^*\widetilde{\theta} \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^n\right)$, donde $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(LM, \mathbb{R}^n)$ es la *forma tautológica*.
- Si $\rho|_{j_x^1 s} := \theta^1\big|_{j_x^1 s} \wedge \cdots \wedge \theta^n|_{j_x^1 s}$ y $s(x) = \tau_{10}(j_x^1 s) = (X_1, \cdots, X_n)$, entonces

$$\theta_{ij}\big|_{j_x^1 s} := X_i \lrcorner \left(X_j \lrcorner\, \eta|_{j_x^1 s}\right).$$

- **Lagrangiano de Palatini:** $\mathscr{L}_P := \eta^{ip}\theta_{il} \wedge \Omega^l_p$, con $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.
- **Vínculos:** Nometricidad: $\omega^{ij}_{\mathfrak{p}} := \eta^{ik}\omega^j_k + \eta^{jk}\omega^i_k$. Torsión: $T^i := d\theta^i + \omega^i_k \wedge \theta^k$.

Donde andamos...

Gravedad de Palatini como problema variacional

- Acción:

$$S[\sigma] := \int_K \sigma^*(\mathscr{L}_P)$$

para toda sección $\sigma : K \subset M \to J^1\tau$ tal que

$$\sigma^*\omega_{\mathfrak{p}} = \sigma^* T = 0 \qquad \text{(secciones admisibles).}$$

- Las *soluciones para la gravedad de Palatini* son las secciones admisibles que son críticas para S.
- **Variaciones:** Dada $\sigma \in \Gamma_K \tau_1$, una *variación de* σ es una familia

$$\{\sigma_s \in \Gamma_K \tau_1, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

de secciones admisibles de la forma

$$\sigma_s = \Phi_s^Z \circ \sigma$$

donde $\Phi_s^Z : J^1\tau \to J^1\tau$ es el flujo de un campo Z vertical respecto de $\tau_1 : J^1\tau \to M$.
- **Problema:** ¿Existe alguna caracterización para estas variaciones?
- La familia $\{\sigma_s\}$ consta de secciones admisibles si y sólo si Z es una simetría infinitesimal del ideal $\langle \omega_{\mathfrak{p}}, T \rangle$ (i.e. $\mathscr{L}_Z \langle \omega_{\mathfrak{p}}, T \rangle \subset \langle \omega_{\mathfrak{p}}, T \rangle$).

Gravedad de Palatini como problema variacional

- Acción:

$$S[\sigma] := \int_K \sigma^*(\mathscr{L}_P)$$

para toda sección $\sigma : K \subset M \to J^1\tau$ tal que

$$\sigma^*\omega_{\mathfrak{p}} = \sigma^* T = 0 \qquad \text{(secciones admisibles).}$$

- Las *soluciones para la gravedad de Palatini* son las secciones admisibles que son críticas para S.
- **Variaciones:** Dada $\sigma \in \Gamma_K \tau_1$, una *variación de* σ es una familia

$$\{\sigma_s \in \Gamma_K \tau_1, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

de secciones admisibles de la forma

$$\sigma_s = \Phi_s^Z \circ \sigma$$

donde $\Phi_s^Z : J^1\tau \to J^1\tau$ es el flujo de un campo Z vertical respecto de $\tau_1 : J^1\tau \to M$.
- **Problema:** ¿Existe alguna caracterización para estas variaciones?
- La familia $\{\sigma_s\}$ consta de secciones admisibles si y sólo si Z es una simetría infinitesimal del ideal $\langle \omega_{\mathfrak{p}}, T \rangle$ (i.e. $\mathscr{L}_Z \langle \omega_{\mathfrak{p}}, T \rangle \subset \langle \omega_{\mathfrak{p}}, T \rangle$).

Gravedad de Palatini como problema variacional

- Acción:
$$S[\sigma] := \int_K \sigma^*(\mathscr{L}_P)$$
para toda sección $\sigma : K \subset M \to J^1\tau$ tal que
$$\sigma^*\omega_{\mathfrak{p}} = \sigma^* T = 0 \qquad \text{(secciones admisibles).}$$
- Las *soluciones para la gravedad de Palatini* son las secciones admisibles que son críticas para S.
- **Variaciones:** Dada $\sigma \in \Gamma_K\tau_1$, una *variación de* σ es una familia
$$\{\sigma_s \in \Gamma_K\tau_1, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$
de secciones admisibles de la forma
$$\sigma_s = \Phi_s^Z \circ \sigma$$
donde $\Phi_s^Z : J^1\tau \to J^1\tau$ es el flujo de un campo Z vertical respecto de $\tau_1 : J^1\tau \to M$.
- **Problema:** ¿Existe alguna caracterización para estas variaciones?
- La familia $\{\sigma_s\}$ consta de secciones admisibles si y sólo si Z es una simetría infinitesimal del ideal $\langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$ (i.e. $\mathscr{L}_Z\langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle \subset \langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$).

Gravedad de Palatini como problema variacional

- Acción:

$$S[\sigma] := \int_K \sigma^*(\mathscr{L}_P)$$

para toda sección $\sigma : K \subset M \to J^1\tau$ tal que

$$\sigma^*\omega_{\mathfrak{p}} = \sigma^* T = 0 \qquad \text{(secciones admisibles).}$$

- Las *soluciones para la gravedad de Palatini* son las secciones admisibles que son críticas para S.
- **Variaciones:** Dada $\sigma \in \Gamma_K\tau_1$, una *variación de* σ es una familia

$$\{\sigma_s \in \Gamma_K\tau_1, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

de secciones admisibles de la forma

$$\sigma_s = \Phi_s^Z \circ \sigma$$

donde $\Phi_s^Z : J^1\tau \to J^1\tau$ es el flujo de un campo Z vertical respecto de $\tau_1 : J^1\tau \to M$.
- **Problema:** ¿Existe alguna caracterización para estas variaciones?
- La familia $\{\sigma_s\}$ consta de secciones admisibles si y sólo si Z es una simetría infinitesimal del ideal $\langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$ (i.e. $\mathscr{L}_Z\langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle \subset \langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$).

Gravedad de Palatini como problema variacional

- Acción:
$$S[\sigma] := \int_K \sigma^*(\mathscr{L}_P)$$
para toda sección $\sigma : K \subset M \to J^1\tau$ tal que
$$\sigma^*\omega_{\mathfrak{p}} = \sigma^* T = 0 \qquad \text{(secciones admisibles).}$$
- Las *soluciones para la gravedad de Palatini* son las secciones admisibles que son críticas para S.
- **Variaciones:** Dada $\sigma \in \Gamma_K \tau_1$, una *variación de* σ es una familia
$$\{\sigma_s \in \Gamma_K \tau_1, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$
de secciones admisibles de la forma
$$\sigma_s = \Phi_s^Z \circ \sigma$$
donde $\Phi_s^Z : J^1\tau \to J^1\tau$ es el flujo de un campo Z vertical respecto de $\tau_1 : J^1\tau \to M$.
- **Problema:** ¿Existe alguna caracterización para estas variaciones?
- La familia $\{\sigma_s\}$ consta de secciones admisibles si y sólo si Z es una simetría infinitesimal del ideal $\langle \omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$ (i.e. $\mathscr{L}_Z \langle \omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle \subset \langle \omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$).

Caracterización de las variaciones infinitesimales

- Sea $\left\{U_j^i\right\}$ una base local de vectores verticales $GL(n)$-invariantes sobre LM.
- Entonces

$$\left\{j^1 U_j^i, \left(\theta^k, \left(E_j^i\right)_{LM}\right)^V\right\}$$

es una base local de vectores sobre $J^1\tau$.

Lema

Sea $\left(f_j^l\right)$ una familia de funciones arbitrarias en $J^1\tau$. Entonces existe un conjunto de funciones $\left(F_{kl}^i\right)$ sobre $J^1\tau$ tal que

$$Z := f_j^l \left(j^1 U_l^j\right) + F_{kl}^i \left(\theta^k, \left(E_i^l\right)_{LM}\right)^V$$

es una simetría infinitesimal de $\langle \omega_p, T \rangle$.

Caracterización de las variaciones infinitesimales

- Sea $\left\{U_j^i\right\}$ una base local de vectores verticales $GL(n)$-invariantes sobre LM.
- Entonces

$$\left\{j^1 U_j^i, \left(\theta^k, \left(E_j^i\right)_{LM}\right)^V\right\}$$

es una base local de vectores sobre $J^1\tau$.

Lema

Sea $\left(f_j^l\right)$ una familia de funciones arbitrarias en $J^1\tau$. Entonces existe un conjunto de funciones $\left(F_{kl}^i\right)$ sobre $J^1\tau$ tal que

$$Z := f_j^l\left(j^1 U_l^j\right) + F_{kl}^i\left(\theta^k, \left(E_i^l\right)_{LM}\right)^V$$

es una simetría infinitesimal de $\langle \omega_{\mathrm{p}}, T \rangle$.

Caracterización de las variaciones infinitesimales

- Sea $\left\{U_j^i\right\}$ una base local de vectores verticales $GL(n)$-invariantes sobre LM.
- Entonces
$$\left\{j^1 U_j^i, \left(\theta^k, \left(E_j^i\right)_{LM}\right)^V\right\}$$
es una base local de vectores sobre $J^1\tau$.

Lema

Sea $\left(f_j^l\right)$ una familia de funciones arbitrarias en $J^1\tau$. Entonces existe un conjunto de funciones $\left(F_{kl}^i\right)$ sobre $J^1\tau$ tal que
$$Z := f_j^l\left(j^1 U_l^j\right) + F_{kl}^i\left(\theta^k, \left(E_i^l\right)_{LM}\right)^V$$
es una simetría infinitesimal de $\langle\omega_{\mathfrak{p}}, T\rangle$.

Ecuaciones de movimiento

Teorema

Sea $\sigma : M \to J^1\tau$ una sección admisible. σ es crítica para la acción de Palatini si y sólo si

$$\sigma^*\left[\left(\eta^{kp}\theta_{il} - \frac{1}{2}\delta_i^k\eta^{qp}\theta_{ql}\right)\wedge\Omega_p^l\right] = 0.$$

Demostración.

Si

$$Z := f_j^l\left(j^1U_l^j\right) + F_{kl}^i\left(\theta^k, \left(E_i^l\right)_{LM}\right)^V$$

es una simetría infinitesimal como en el lema anterior y $\sigma : M \to J^1\tau$ admisible,

$$\delta_Z S[\sigma] = \int_M f_k^i\sigma^*\left[\left(\eta^{kp}\theta_{il} - \frac{1}{2}\delta_i^k\eta^{qp}\theta_{ql}\right)\wedge\Omega_p^l\right].$$

Además, como $\left\{j^1U_j^i, \left(\theta^k, \left(E_j^i\right)_{LM}\right)^V\right\}$ es una base, no hay más restricciones. □

A modo de resumen...

- Se calcularon algunas simetrías infinitesimales para el problema de Griffiths asociado a un modelo de gravedad métrico-afín.
- Por su intermedio fue posible calcular las ecuaciones describiendo localmente a las secciones críticas del problema de Griffiths.
- Actualmente nos encontramos aplicando estos resultados a otras formulaciones de la gravedad (principalmente gravedad de Lovelock).

Bibliografía I

- Castrillón López, M. y J. Muñoz Masqué (2001). "The geometry of the bundle of connections". En: *Mathematische Zeitschrift* 236 (4 2001). 10.1007/PL00004852, págs. 797-811.
- Hehl, Friedrich W. y col. (1995). "Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance". En: *Physics Reports* 258.1-2, págs. 1 -171.