# Una aplicación de la geometría co-simpléctica a problemas de ingeniería

Eduardo García-Toraño Andrés

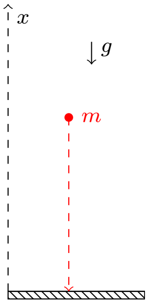
Dep. de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Argentina

(+ L. Colombo y M. E. Eyrea Irazu)

Bahía Blanca, 6 – Junio – 2019

# Sistemas híbridos

Sistemas que combinan comportamiento continuo y discreto.




Sistema híbrido es 4-upla $\mathscr{L} = (Q, L, S, R)$:

- $Q$ variedad,
- $L\colon \mathbb{R} \times TQ \to \mathbb{R}$ Lagrangiana,
- $S$ subvariedad $\mathbb{R} \times TQ$, "switching surface",
- $R\colon S \to \mathbb{R} \times TQ$, "reset map".

Ej. En la figura: $Q = \mathbb{R}$, $S = \{x = 0, v \leq 0\} \cap T\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la Lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx,$$

y $R\colon (t, x, v) \mapsto (t, x, -cv)$, con $0 < c \leq 1$ ($c = 1$ el impacto elástico).

Objetivo: estudiar la reducción de modelos simples de sistemas híbridos.

- Una variedad co-simpléctica es $(M, \Omega, \eta)$ con $M$ variedad de dimensión $2n+1$, $\Omega$ 2-forma cerrada, $\eta$ 1-forma cerrada y $\Omega^n \wedge \eta$ forma de volumen.
- Campo de Reeb (en $M$) $\mathbf{T}$ se caracteriza por $i_{\mathbf{T}}\Omega = 0$ y $i_{\mathbf{T}}\eta = 1$.
- Dada $H \colon M \to \mathbb{R}$ suave, campo Hamiltoniano (en $M$) se caracteriza mediante
$$i_{X_H}\Omega = dH - \mathbf{T}(H)\eta, \quad i_{X_H}\eta = 0.$$

El caso que nos interesa es $M = TQ \times \mathbb{R}$; para una Lagrangiana mecánica (por tanto regular) $L$:

$$\Omega_L = \mathbb{F}L^*(dq \wedge dp) = dq \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right), \quad \eta = dt,$$

y Hamiltoniano $E_L(t, q, \dot{q}) = \langle \mathbb{F}L(t, q, \dot{q}), \dot{q}\rangle - L(t, q, \dot{q})$. Campo de evolución:

$$Z_L = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \Gamma(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}},$$

con $\Gamma$ dado por ecs de EL $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$.

# Simetrías y reducción co-simpléctica

Consideremos a un sistema híbrido $\mathscr{L} = (Q, L, S, R)$.
Sea $\Psi_g \colon TQ \times \mathbb{R} \to TQ \times \mathbb{R}$ una acción "suficientemente regular" cosimpléctica de un grupo de Lie $G$ que es levantada de una ación el la base. Asumimos:

- Admite aplicación momento $J_L = J \circ \mathbb{F}L$, con $J \colon \mathbb{R} \times T^*Q \to \mathfrak{g}^*$ dado por

$$\langle J(t, q, p), \xi \rangle = \langle p, \xi_Q \rangle, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

- $L$ es invariante bajo $\Psi^{TQ}$, i.e. $L \circ \Psi^{TQ} = L$.
- $\Psi$ se restringe $S$, con su aplicación momento correspondiente.
- $R$ es equivariante, es decir

$$R \circ \Psi_g \mid_S = \Psi_g \circ R.$$

Vayamos al caso Abeliano $G = \mathbb{S}^1$ y $Q = S \times G$. Usando reducción cosimpléctica se demuestra: para $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $J_L^{-1}(\mu)/G_\mu$ se identifica con $T(Q/\mathbb{S}^1) \times \mathbb{R}$, y la dinámica se relaciona

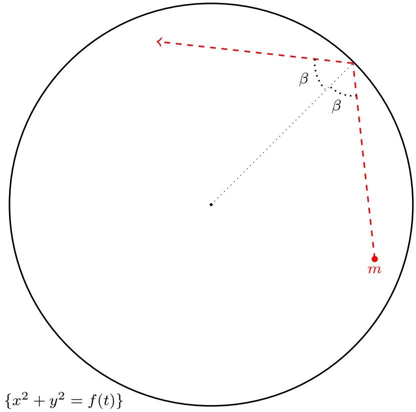
$$\mathscr{L} = (Q, L, S, R) \longrightarrow \mathscr{L}_\mu = (Q/\mathbb{S}^1, L_\mu, S_\mu, R_\mu)$$

siendo (si $\theta$ es cíclica)

$$L_\mu = \left[ L - \mu \dot{\theta} \right] \Big|_{J_L = \mu}.$$

# Un ejemplo sencillo (billar con paredes móviles)

Tenemos $L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, que es invariante bajo rotaciones. El switching es $S = (\mathbb{R} \times TQ) \cap \{x^2 + y^2 = f(t), (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (x, y) \geq 0\}$, que también es invariante.




Impacto:

$$\dot{x}^+ = \dot{x}^- + \frac{\dot{f}(t) - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)}{f(t)} x,$$

$$\dot{y}^+ = \dot{y}^- + \frac{\dot{f}(t) - 2(x\dot{x}^- + y\dot{y}^-)}{f(t)} y.$$

Impacto es $\mathbb{S}^1$-equivariante.

Se conserva el momento $r^2\dot{\theta}$.

# Un ejemplo sencillo (billar con paredes móviles) – cont.

En polares

- $L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \Rightarrow L(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$
- Reset $(\dot{r}^+)^2 = (\dot{r}^-)^2 + \frac{r}{f(t)}(\dot{f}(t) - 2r\dot{r}^-)\left(2\dot{r}^- + \frac{(\dot{f}(t)-2r\dot{r}^-)r}{f(t)}\right), \dot{\theta}^+ = \dot{\theta}^-$
- Momento $J_L(t, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = p_\theta = mr^2\dot{\theta}$

Calculamos el Routhiano:

$$L_\mu(t, r, \dot{r}) = \left[L - \mu\dot{\theta}\right]\Big|_{\{\dot{\theta}=\mu/mr^2\}} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{\mu^2}{2mr^2}$$

Sistema reducido:

$$\mathscr{L}_\mu = (Q_{\mathrm{red}}, L_\mu, S_\mu, R_\mu),$$

con $Q_{\mathrm{red}} \simeq \mathbb{R}^+$, con $S_\mu = \{r^2 = f(t), \dot{r} > 0\}$ y $(r, \dot{r}^-) \mapsto (r, \dot{r}^+ = -\dot{r}^-)$

Hay una equivalencia:

$$\mathscr{L} \xrightarrow{\text{Reducción}} \mathscr{L}_\mu \qquad\qquad \mathscr{L}_\mu \xrightarrow{\text{Reconstrucción}} \mathscr{L}$$

# Muchas gracias