Estimación en presencia de parámetros incidentales via máxima Lq-verosimilitud

Patricia Giménez[1], Lucas Guarracino[1], Manuel Galea[2]

[1] Centro Marplatense de Investigaciones Matemáticas - UNMdP
[2] Depto de Estadística, Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile

XV Congreso Monteiro
Bahía Blanca - Junio de 2019

Contenido de la presentación

1. Estimación basada en la minimización de q-divergencias.
   q-entropía y estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV) (caso i.i.d.)

2. EMLqV en presencia de parámetros incidentales (caso i.n.i.d.)

3. Principales resultados.

4. Aplicación: modelo de regresión lineal simple con errores en las variables funcional.

Estimación basada en la minimización de q-divergencias

$\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ muestra aleatoria de una población cuya verdadera densidad es g.

Como modelo asumimos $\mathcal{F} = \{f_{\boldsymbol{\theta}} = f(.;\boldsymbol{\theta})\colon \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$

q-divergencia o divergencia potencia (Cressie and Read, 1984)

$$\mathcal{D}_q(g, f_{\boldsymbol{\theta}}) = -\frac{1}{q}\mathrm{E}_g\left[L_q\left\{\frac{f(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{\theta})}{g(\boldsymbol{Z})}\right\}\right] = -\frac{1}{q}\int L_q\left\{\frac{f(\boldsymbol{z};\boldsymbol{\theta})}{g(\boldsymbol{z})}\right\} g(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z},$$

$$L_q(u) = \begin{cases} \frac{u^{1-q}-1}{1-q}, & q \neq 1 \\ \log(u), & q = 1 \end{cases} \qquad q\text{-logaritmo}$$

$q = 1, \quad \mathcal{D}_1(g, f_{\boldsymbol{\theta}})$: divergencia de Kullback-Leibler

Estimación basada en la minimización de q-divergencias

$\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ muestra aleatoria de una población cuya verdadera densidad es g.

Como modelo asumimos $\mathcal{F} = \{f_{\boldsymbol{\theta}} = f(.;\boldsymbol{\theta}) \colon \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$

q-divergencia o divergencia potencia (Cressie and Read, 1984)

$$\mathcal{D}_q(g, f_{\boldsymbol{\theta}}) = -\frac{1}{q}\mathrm{E}_g\left[L_q\left\{\frac{f(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{\theta})}{g(\boldsymbol{Z})}\right\}\right] = -\frac{1}{q}\int L_q\left\{\frac{f(\boldsymbol{z};\boldsymbol{\theta})}{g(\boldsymbol{z})}\right\} g(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z},$$

$$L_q(u) = \begin{cases} \frac{u^{1-q}-1}{1-q}, & q \neq 1 \\ \log(u), & q = 1 \end{cases} \qquad q\text{-logaritmo}$$

$q = 1, \quad \mathcal{D}_1(g, f_{\boldsymbol{\theta}})$: divergencia de Kullback-Leibler

q-entropía o entropía no extensiva (Havdra y Charvat, 1967)

$$\mathcal{H}_q(g, f_{\boldsymbol{\theta}}) = -\mathrm{E}_g[L_q\{f(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{\theta})\}] = -\int L_q\{f(\boldsymbol{z};\boldsymbol{\theta})\}g(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z}$$

$q = 1, \quad \mathcal{H}_1(g, f_{\boldsymbol{\theta}})$: entropía de Shannon

Relación entre q-divergencia y q-entropía

(Ferrari y La Vecchia, 2012)

$$\boldsymbol{\theta}^0 = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \mathcal{D}_q(g, f_{\boldsymbol{\theta}})$$

Si $q = 1$, $\quad \boldsymbol{\theta}^0 = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \mathcal{H}_1(g, f_{\boldsymbol{\theta}}) = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \mathcal{D}_1(g, f_{\boldsymbol{\theta}})$

Si $q \neq 1$, $\quad \boldsymbol{\theta}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \mathcal{H}_q(g, f_{\boldsymbol{\theta}}) = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} \mathcal{D}_q(g^{(1/q)}, f_{\boldsymbol{\theta}})$

siendo $\quad g^{(\alpha)}(\boldsymbol{z}) = \dfrac{g^\alpha(\boldsymbol{z})}{\int g^\alpha(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z}}, \quad \alpha > 0,$ la transformación potencia.

$\boldsymbol{\theta}^*$ parámetro substituto, $\qquad \boldsymbol{\theta}^* \neq \boldsymbol{\theta}^0$

Para $0 < q < 1$, $g^{(1/q)}$ acentúa partes de g con valores grandes de densidad y reduce la importancia de las colas.

Minimizando una versión empírica de $\mathcal{H}_q$ se obtiene un procedimiento de estimación robusto totalmente paramétrico.

Estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV)

Estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV) (Ferrari y Yang, 2010) basado en una muestra $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max} \sum_{j=1}^{n} L_q\{f(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})\}$$

Estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV)

Estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV) (Ferrari y Yang, 2010) basado en una muestra $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max} \sum_{j=1}^{n} L_q\{f(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})\}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^*$.

$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tau_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$, donde $\tau_\alpha \colon \Theta \to \Theta$ es la transformación definida por

$$f(\boldsymbol{z}; \tau_\alpha(\boldsymbol{\theta})) = f^{(\alpha)}(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta}), \qquad 0 < \alpha < \infty,$$

asumiendo que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo la transformación potencia.

Estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV)

Estimador de máxima Lq-verosimilitud (EMLqV) (Ferrari y Yang, 2010) basado en una muestra $\boldsymbol{Z}_1, \dots, \boldsymbol{Z}_n$,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max} \sum_{j=1}^{n} L_q\{f(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})\}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^*$.

$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \tau_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$, donde $\tau_\alpha : \Theta \to \Theta$ es la transformación definida por

$$f(\boldsymbol{z}; \tau_\alpha(\boldsymbol{\theta})) = f^{(\alpha)}(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta}), \qquad 0 < \alpha < \infty,$$

asumiendo que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo la transformación potencia.

Estimador de máxima verosimilitud (EMV) $(q = 1)$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max} \sum_{j=1}^{n} \log f(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$.

EMLqV en presencia de parámetros incidentales

$\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ v.a. independientes, $\boldsymbol{Z}_j$ con verdadera densidad g_j.

Como modelo asumimos

$$\mathcal{F}_j = \{f_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j} = f_j(.;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j) : \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{\xi}_j \in \Xi \subset \mathbb{R}^r\}, \quad j = 1, \ldots n$$

$\boldsymbol{\theta}$ parámetro estructural de interés, $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ parámetros incidentales

EMLqV en presencia de parámetros incidentales

$\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ v.a. independientes, $\boldsymbol{Z}_j$ con verdadera densidad g_j.

Como modelo asumimos

$\mathcal{F}_j = \{f_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j} = f_j(.;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j)\colon\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{\xi}_j \in \Xi \subset \mathbb{R}^r\}, \quad j = 1, \ldots n$

$\boldsymbol{\theta}$ parámetro estructural de interés, $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ parámetros incidentales

Asumimos que existe $\tau_\alpha = (\tau_{\alpha,1}, \tau_{\alpha,2})\colon \Theta \times \Xi \to \Theta \times \Xi$

$$f_j(\boldsymbol{z}; \tau_{\alpha,1}(\boldsymbol{\theta}), \tau_{\alpha,2}(\boldsymbol{\xi}_j)) = f_j^{(\alpha)}(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j) \quad j = 1, 2, \ldots$$

y $\mathcal{F}_j$ es cerrada bajo la transformación potencia.

EMLqV en presencia de parámetros incidentales

$\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_n$ v.a. independientes, $\boldsymbol{Z}_j$ con verdadera densidad g_j.

Como modelo asumimos

$\mathcal{F}_j = \{f_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j} = f_j(.;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j)\colon\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{\xi}_j \in \Xi \subset \mathbb{R}^r\}, \quad j = 1, \ldots n$

$\boldsymbol{\theta}$ parámetro estructural de interés, $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ parámetros incidentales

Asumimos que existe $\tau_\alpha = (\tau_{\alpha,1}, \tau_{\alpha,2})\colon \Theta \times \Xi \to \Theta \times \Xi$

$$f_j(\boldsymbol{z};\tau_{\alpha,1}(\boldsymbol{\theta}),\tau_{\alpha,2}(\boldsymbol{\xi}_j)) = f_j^{(\alpha)}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j) \quad j = 1, 2, \ldots$$

y $\mathcal{F}_j$ es cerrada bajo la transformación potencia.

$$(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\xi}_1^*, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n^*) = \underset{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_n}{\arg\min} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}_q(g_j, f_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi}_j})$$

$\boldsymbol{\theta}^*$ parámetro estructural substituto.

EMLqV en presencia de parámetros incidentales

$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*, \hat{\boldsymbol{\xi}}_1^*, \dots, \hat{\boldsymbol{\xi}}_n^*$ EMLqV

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*, \hat{\boldsymbol{\xi}}_1^*, \dots, \hat{\boldsymbol{\xi}}_n^*) = \underset{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n}{\arg\max} \sum_{j=1}^n L_q\{f_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j)\}$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}) = \underset{\boldsymbol{\xi}_j}{\arg\max}\, L_q\{f_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j)\}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max}\, H_n(\boldsymbol{\theta}),$$

donde

$$H_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n L_q\{f_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}))\} = \sum_{j=1}^n h_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})$$

EMLqV en presencia de parámetros incidentales

$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*, \hat{\boldsymbol{\xi}}_1^*, \dots, \hat{\boldsymbol{\xi}}_n^*$ EMLqV

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*, \hat{\boldsymbol{\xi}}_1^*, \dots, \hat{\boldsymbol{\xi}}_n^*) = \underset{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n}{\arg\max} \sum_{j=1}^n L_q\{f_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j)\}$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}) = \underset{\boldsymbol{\xi}_j}{\arg\max}\, L_q\{f_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j)\}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max}\, H_n(\boldsymbol{\theta}),$$

donde

$$H_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^n L_q\{f_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta}))\} = \sum_{j=1}^n h_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^\dagger \neq \boldsymbol{\theta}^*$

$$\boldsymbol{\theta}^\dagger = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Theta}{\arg\max} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_{g_j}[h_j(\boldsymbol{Z}_j; \boldsymbol{\theta})]$$

Resultados

- Bajo condiciones de regularidad apropiadas el EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ converge en probabilidad a $\boldsymbol{\theta}^\dagger$ y es asintóticamente normal.

Resultados

- Bajo condiciones de regularidad apropiadas el EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ converge en probabilidad a $\boldsymbol{\theta}^\dagger$ y es asintóticamente normal.
- Si $\boldsymbol{\theta}^\dagger = \rho(\boldsymbol{\theta}^*)$, entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \eta_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$, donde $\eta_q = \tau_{q,1} \circ \rho^{-1}$

Resultados

- Bajo condiciones de regularidad apropiadas el EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ converge en probabilidad a $\boldsymbol{\theta}^\dagger$ y es asintóticamente normal.
- Si $\boldsymbol{\theta}^\dagger = \rho(\boldsymbol{\theta}^*)$, entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \eta_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$, donde $\eta_q = \tau_{q,1} \circ \rho^{-1}$
- Para $0 < q < 1$ el estimador tiene buenas propiedades de robustez. q controla el balance entre eficiencia y robustez.

Resultados

- Bajo condiciones de regularidad apropiadas el EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{*}$ converge en probabilidad a $\boldsymbol{\theta}^{\dagger}$ y es asintóticamente normal.
- Si $\boldsymbol{\theta}^{\dagger} = \rho(\boldsymbol{\theta}^{*})$, entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \eta_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{*})$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^{0}$, donde $\eta_q = \tau_{q,1} \circ \rho^{-1}$
- Para $0 < q < 1$ el estimador tiene buenas propiedades de robustez. q controla el balance entre eficiencia y robustez.
- El EMV es obtenido como caso particular cuando $q = 1$.

Resultados

- Bajo condiciones de regularidad apropiadas el EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ converge en probabilidad a $\boldsymbol{\theta}^\dagger$ y es asintóticamente normal.
- Si $\boldsymbol{\theta}^\dagger = \rho(\boldsymbol{\theta}^*)$, entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \eta_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$, donde $\eta_q = \tau_{q,1} \circ \rho^{-1}$
- Para $0 < q < 1$ el estimador tiene buenas propiedades de robustez. q controla el balance entre eficiencia y robustez.
- El EMV es obtenido como caso particular cuando $q = 1$.
- Se obtiene un algoritmo de estimación iterativo de re-ponderación, basado en una versión ponderada del escore usual.

Resultados

- Bajo condiciones de regularidad apropiadas el EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ converge en probabilidad a $\boldsymbol{\theta}^\dagger$ y es asintóticamente normal.
- Si $\boldsymbol{\theta}^\dagger = \rho(\boldsymbol{\theta}^*)$, entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \eta_q(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^0$, donde $\eta_q = \tau_{q,1} \circ \rho^{-1}$
- Para $0 < q < 1$ el estimador tiene buenas propiedades de robustez. q controla el balance entre eficiencia y robustez.
- El EMV es obtenido como caso particular cuando $q = 1$.
- Se obtiene un algoritmo de estimación iterativo de re-ponderación, basado en una versión ponderada del escore usual.
- La elección de un valor apropiado del parámetro q puede basarse por ejemplo en alguna técnica numérica como bootstrap, validación cruzada o BIC. En aplicación, dada una grilla de valores $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$, proponemos elegir

$$q_{\text{opt}} = \arg\min_{q \in Q} \widehat{\mathrm{ECM}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(q)}),$$

donde $\widehat{\mathrm{ECM}}$ es el error cuadrático medio del estimador calculado mediante bootstrap paramétrico.

Aplicación:
Modelo de regresión lineal simple con errores en las variables

$$Y_j = \alpha + \beta\xi_j + e_j,$$
$$X_j = \xi_j + u_j, \qquad \xi_j \text{ constantes fijas desconocidas}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

donde $e_j \sim N(0, \sigma_e^2)$ y $u_j \sim N(0, \sigma_u^2)$ son independientes.

Asumimos $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$ conocida para identificabilidad del modelo.
Sin pérdida de generalidad consideramos $\lambda = 1$, luego $\sigma_e^2 = \sigma_u^2 = \phi$.

Aplicación:
Modelo de regresión lineal simple con errores en las variables

$$Y_j = \alpha + \beta\xi_j + e_j,$$
$$X_j = \xi_j + u_j, \qquad \xi_j \text{ constantes fijas desconocidas}, \quad j = 1, \dots, n,$$

donde $e_j \sim N(0, \sigma_e^2)$ y $u_j \sim N(0, \sigma_u^2)$ son independientes.

Asumimos $\lambda = \sigma_e^2/\sigma_u^2$ conocida para identificabilidad del modelo.
Sin pérdida de generalidad consideramos $\lambda = 1$, luego $\sigma_e^2 = \sigma_u^2 = \phi$.

$$\boldsymbol{Z}_j = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\xi_j + \boldsymbol{\epsilon}_j, \quad j = 1, \dots, n,$$
$$\boldsymbol{Z}_j \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_j, \phi\boldsymbol{I}_2), \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\xi_j$$

donde $\boldsymbol{Z}_j = (X_j, Y_j)^T$ son observables y $\boldsymbol{\epsilon}_j = (u_j, e_j)^T$ son errores i.i.d, $\boldsymbol{a} = (0, \alpha)^T$ y $\boldsymbol{b} = (1, \beta)^T$.

$\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \phi)^T$ parámetro estructural, $\xi_1, \dots, \xi_n$ parámetros incidentales

El EMLqV $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ es estimador consistente de $\boldsymbol{\theta}^\dagger = (\alpha^0, \beta^0, (q - \frac{1}{2})\phi^0)^T$, asumiendo $\frac{1}{2} < q \leq 1$.

Eficiencia relativa asintótica (ERA) respecto del EMV

La ERA de los EMLqV de α y β está dada por

$$[1 - 4(1-q)^2]^{\frac{1}{2}+1} \times 100.$$

La ERA del EMLqV de ϕ está dada por

$$\frac{[1 - 4(1-q)^2]^{\frac{1}{2}+2}}{1 + 4(1-q)^2} \times 100.$$

	q								
ERA	1	0.99	0.98	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70
$\alpha,\ \beta$	100	99.94	99.76	98.50	94.06	86.81	76.99	64.95	51.20
ϕ	100	99.88	99.52	97.03	88.53	75.59	59.88	43.30	27.77

$$1 \quad > \quad q \quad > \quad 0$$

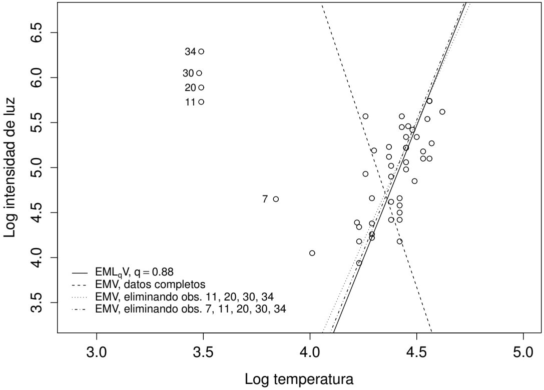
$\longleftarrow$ eficiencia/robustez $\longrightarrow$

Ejemplo numérico (Rousseeuw y Leroy, 1987)

Datos de Herzsprung-Russell del grupo de estrellas CYG OB1 ($n = 47$)

X : logaritmo de la temperatura efectiva en la superficie de la estrella

Y : logaritmo de la intensidad de luz



	EMV	EMLqV
	Datos completos	
		q=0.88
$\hat{\alpha}$	35.43	-21.09
$\hat{\beta}$	-7.06	5.90
$\hat{\phi}$	0.08	0.01
	Eliminando obs. 11,20,30,34	
		q=0.90
$\hat{\alpha}$	-18.26	-21.01
$\hat{\beta}$	5.28	5.88
$\hat{\phi}$	0.01	0.01
	Eliminando obs. 7,11,20,30,34	
		q=0.93
$\hat{\alpha}$	-20.75	-20.95
$\hat{\beta}$	5.84	5.87
$\hat{\phi}$	0.01	0.01

Referencias

1. Cressie, N. y Read, T.R.C. (1984). Multinomial goodness-of-fit tests. *JRSS, B*, 46, 440-464.

2. Ferrari, D. y Yang, Y. (2010). Maximum Lq-likelihood estimation. *Annals of Statistics*, 38, 753-783.

3. Ferrari, D. y La Vecchia, D. (2012). On robust estimation via pseudo-additive information. *Biometrika*, 99, 238-244.

4. Havdra, J. y Charvat, F. (1967). Quantification method of classification processes: Concept of structural entropy. *Kibernetika*, 3, 30-35.

5. Rousseeuw, P.J. y Leroy, A.M. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley & Sons, NY.