

Formulación de los Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem desde el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados

Janina Micaela Roldan¹ **María Cristina Martín¹⁻²**

¹ Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa

² Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca - 2019

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Modelos de Rasgos Latentes

Modelos de Rasgos Latentes

Definición

Se denomina **Modelo de Rasgos Latentes (MRL)** al sistema (\mathbf{Y}, Θ) que relaciona \mathbf{Y} con Θ , donde $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_p)$, con $p \in \mathbb{N}$, es una secuencia de variables manifiestas categóricas y $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q)'$, con $q \in \mathbb{N}$ y $(q < p)$, un vector de variables latentes medidas en escala de intervalo o razón.

Modelo de Rasgos Latentes - Objetivos

Los objetivos de la aplicación del modelo (\mathbf{Y}, Θ) , son (Bartholomew et. al, 2008):

- indagar acerca de las relaciones entre las respuestas observadas;

Modelo de Rasgos Latentes - Objetivos

Los objetivos de la aplicación del modelo (\mathbf{Y}, Θ) , son (Bartholomew et. al, 2008):

- indagar acerca de las relaciones entre las respuestas observadas;
- determinar si las relaciones anteriores pueden ser explicadas por una pequeña cantidad de variables latentes;

Modelo de Rasgos Latentes - Objetivos

Los objetivos de la aplicación del modelo (\mathbf{Y}, Θ) , son (Bartholomew et. al, 2008):

- indagar acerca de las relaciones entre las respuestas observadas;
- determinar si las relaciones anteriores pueden ser explicadas por una pequeña cantidad de variables latentes;
- asignar una puntuación a cada examinado para cada variable latente en función de las respuestas observadas.

Modelo de Rasgos Latentes - Supuestos

Se considera que un MRL (\mathbf{Y}, Θ) satisface los supuestos de:

Modelo de Rasgos Latentes - Supuestos

Se considera que un MRL (\mathbf{Y}, Θ) satisface los supuestos de:

- **Unidimensionalidad:** si Θ está formado por una única variable latente, es decir, $q = 1$.

Modelo de Rasgos Latentes - Supuestos

Se considera que un MRL (\mathbf{Y}, Θ) satisface los supuestos de:

- **Unidimensionalidad:** si Θ está formado por una única variable latente, es decir, $q = 1$.
- **Independencia condicional:** si las respuestas a los ítems son independientes condicionalmente a las variables latentes.

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Modelo de Rasgos Latentes Binario

Definición

El modelo de rasgos latentes (\mathbf{Y}, Θ) se dice que es un **Modelo de Rasgos Latentes Binario (MRLB)** si la variable manifiesta $\mathbf{Y}_j | \Theta = \Theta$ con $j = 1, \dots, p$, puede tomar dos valores posibles: 1, éxito con probabilidad $\pi_j(\Theta)$ y 0, fracaso con probabilidad $1 - \pi_j(\Theta)$, siendo $0 \leq \pi_j(\Theta) \leq 1$.

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Modelo TRI Binario Unidimensional

Definición

El **Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional (MRLBU)** también conocido como **Modelo TRI Binario Unidimensional** es un MRLB que considera una única variable latente, es decir, $\Theta = \theta$.

Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

- Test dicotómico con p ítems respondido por n individuos.

Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

- Test dicotómico con p ítems respondido por n individuos.
- \mathbf{Y} está compuesta por las variables $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{nj})'$, con $j = 1, \dots, p$. De manera matricial \mathbf{Y} se pueden representar como sigue,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1j} & \dots & Y_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix}$$

Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

- Test dicotómico con p ítems respondido por n individuos.
- \mathbf{Y} está compuesta por las variables $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{nj})'$, con $j = 1, \dots, p$. De manera matricial \mathbf{Y} se pueden representar como sigue,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1j} & \dots & Y_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix}$$

- $P(Y_{ij} = 1 | \theta = \theta_i)$ se denota π_{ij} .

Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

- Test dicotómico con p ítems respondido por n individuos.
- \mathbf{Y} está compuesta por las variables $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{nj})'$, con $j = 1, \dots, p$. De manera matricial \mathbf{Y} se pueden representar como sigue,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1j} & \dots & Y_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix}$$

- $P(Y_{ij} = 1 | \theta = \theta_i)$ se denota π_{ij} .
- Regresión de cada \mathbf{Y}_j sobre θ : $E(\mathbf{Y}_j | \theta)$.

Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

- Test dicotómico con p ítems respondido por n individuos.
- \mathbf{Y} está compuesta por las variables $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{nj})'$, con $j = 1, \dots, p$. De manera matricial \mathbf{Y} se pueden representar como sigue,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1j} & \dots & Y_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix}$$

- $P(Y_{ij} = 1 | \theta = \theta_i)$ se denota π_{ij} .
- Regresión de cada \mathbf{Y}_j sobre θ : $E(\mathbf{Y}_j | \theta)$.
- $E(\mathbf{Y}_j | \theta) = P(\mathbf{Y}_j = 1 | \theta) = \pi_j(\theta)$.

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Las componentes del MRLBU para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$, son:

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Las componentes del MRLBU para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$, son:

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n$$

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Las componentes del MRLBU para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$, son:

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = \alpha_j + \beta_j \theta_i \quad i = 1, \dots, n$$

donde

- η_{ij} es el predictor lineal latente
- θ_i es la habilidad latente del individuo i
- α_j y β_j son los coeficientes de regresión

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Las componentes del MRLBU para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$, son:

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = \alpha_j + \beta_j \theta_i \quad i = 1, \dots, n$$

donde

- η_{ij} es el predictor lineal latente
- θ_i es la habilidad latente del individuo i
- α_j y β_j son los coeficientes de regresión

- **Función de enlace:**

$$g(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Especificación del MRLBU:

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Especificación del MRLBU:

- El MRLB satisface el supuesto de *unidimensionalidad* y de *independencia condicional*.

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Especificación del MRLBU:

- El MRLB satisface el supuesto de *unidimensionalidad* y de *independencia condicional*.
- $\theta \sim N(0, 1)$.

Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional

Especificación del MRLBU:

- El MRLB satisface el supuesto de *unidimensionalidad* y de *independencia condicional*.
- $\theta \sim N(0, 1)$.
- $g(\cdot)$ es una función diferenciable, monótona e invertible.

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Curva Característica del Ítem

Definición

$\pi_j(\theta)$ es una función matemática que modela el comportamiento de la probabilidad de respuesta correcta para cada ítem j , con $j = 1, \dots, p$, según la habilidad o rasgo latente de cada individuo. En la literatura psicométrica esta función se conoce como Curva Característica del Ítem (CCI).

Curva Característica del Ítem

Definición

$\pi_j(\theta)$ es una función matemática que modela el comportamiento de la probabilidad de respuesta correcta para cada ítem j , con $j = 1, \dots, p$, según la habilidad o rasgo latente de cada individuo. En la literatura psicométrica esta función se conoce como Curva Característica del Ítem (CCI).

Enlace *Logit*

Considerando el enlace *logit*, la CCI del MRLBU para el ítem j es

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}{1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}} \quad j = 1, \dots, p$$

Curva Característica del Ítem

Parámetro de discriminación

Se denomina *parámetro de discriminación*, y se denota a_j , al valor proporcional a la pendiente de la recta tangente a la CCI en el punto de máxima pendiente de ésta.

Curva Característica del Ítem

Parámetro de discriminación

Se denomina *parámetro de discriminación*, y se denota a_j , al valor proporcional a la pendiente de la recta tangente a la CCI en el punto de máxima pendiente de ésta.

La relación entre los coeficientes de regresión y el parámetro de discriminación es $a_j = \beta_j$, $j = 1, \dots, p$.

Curva Característica del Ítem

Parámetro de dificultad

El parámetro de dificultad, denotado por b_j , es un parámetro de localización y se define como el valor de la variable latente para el cual la probabilidad de responder correctamente el ítem j es 0,5, $j = 1, \dots, p$.

Curva Característica del Ítem

Parámetro de dificultad

El parámetro de dificultad, denotado por b_j , es un parámetro de localización y se define como el valor de la variable latente para el cual la probabilidad de responder correctamente el ítem j es 0,5, $j = 1, \dots, p$.

La relación entre los coeficientes de regresión y el parámetro de dificultad es $b_j = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}$, $j = 1, \dots, p$.

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - **Modelo Logístico de 2 parámetros**
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Modelo Logístico de 2 parámetros

Definición

El MRLBU que adopta la función de enlace logit se denomina **Modelo Logístico de 2 parámetros (ML2)** (Lord, 1980).

Modelo Logístico de 2 parámetros

Definición

El MRLBU que adopta la función de enlace logit se denomina **Modelo Logístico de 2 parámetros (ML2)** (Lord, 1980).

El predictor lineal latente del ML2 es

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

Modelo Logístico de 2 parámetros

Las componentes que definen el ML2 son, para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$:

Modelo Logístico de 2 parámetros

Las componentes que definen el ML2 son, para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$:

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n$$

Modelo Logístico de 2 parámetros

Las componentes que definen el ML2 son, para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$:

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n$$

Modelo Logístico de 2 parámetros

Las componentes que definen el ML2 son, para cada \mathbf{Y}_j , $j = 1, \dots, p$:

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n$$

- **Función de enlace:**

$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n$$

Modelo Logístico de 2 parámetros

CCI del ML2

La CCI del ML2 para el ítem j , con $j = 1, \dots, p$, es la función

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta-b_j)}}$$

o equivalentemente,

$$\pi_j(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-a_j(\theta-b_j)}}$$

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - **Modelo Logístico de 1 parámetro**
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Modelo Logístico de 1 parámetro

El **Modelo Logístico de 1 parámetro (ML1)** asume que el parámetro de discriminación, denotado por a , es el mismo para todos los individuos.

Modelo Logístico de 1 parámetro

El **Modelo Logístico de 1 parámetro (ML1)** asume que el parámetro de discriminación, denotado por a , es el mismo para todos los individuos.

- El predictor latente del ML1 es

$$\eta_{ij} = a(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

Modelo Logístico de 1 parámetro

El **Modelo Logístico de 1 parámetro (ML1)** asume que el parámetro de discriminación, denotado por a , es el mismo para todos los individuos.

- El predictor latente del ML1 es

$$\eta_{ij} = a(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

- La CCI del ítem j , para $j = 1, \dots, p$, queda expresada por la ecuación

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{a(\theta - b_j)}}{1 + e^{a(\theta - b_j)}}$$

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Modelo de Rasch

Definición

El **Modelo de Rasch** (Rasch, 1960) considera que el parámetro de discriminación asume el valor 1 en todas las CCI correspondientes a cada ítem j , con $j = 1, \dots, p$.

Modelo de Rasch

Definición

El **Modelo de Rasch** (Rasch, 1960) considera que el parámetro de discriminación asume el valor 1 en todas las CCI correspondientes a cada ítem j , con $j = 1, \dots, p$.

- El predictor latente del Modelo de Rasch queda configurado por

$$\eta_{ij} = \theta_i - b_j \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

Modelo de Rasch

Definición

El **Modelo de Rasch** (Rasch, 1960) considera que el parámetro de discriminación asume el valor 1 en todas las CCI correspondientes a cada ítem j , con $j = 1, \dots, p$.

- El predictor latente del Modelo de Rasch queda configurado por

$$\eta_{ij} = \theta_i - b_j \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

- La CCI del modelo queda expresada por la ecuación

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\theta - b_j}}{1 + e^{\theta - b_j}} \quad j = 1, \dots, p$$

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Síntesis

Se presentaron las bases matemático-estadísticas de los Modelos Logísticos de 1 y 2 parámetros desarrollados en la TRI a partir del concepto de regresión lineal.

Síntesis

Se presentaron las bases matemático-estadísticas de los Modelos Logísticos de 1 y 2 parámetros desarrollados en la TRI a partir del concepto de regresión lineal.

- Se definieron los Modelos de Rasgos Latentes, los que consideran respuesta binaria llamados Modelos de Rasgos Latentes Binarios y a partir de ellos los que asumen una única variable latente, denominados Modelos de Rasgos Latentes Binarios Unidimensionales.

Síntesis

Se presentaron las bases matemático-estadísticas de los Modelos Logísticos de 1 y 2 parámetros desarrollados en la TRI a partir del concepto de regresión lineal.

- Se definieron los Modelos de Rasgos Latentes, los que consideran respuesta binaria llamados Modelos de Rasgos Latentes Binarios y a partir de ellos los que asumen una única variable latente, denominados Modelos de Rasgos Latentes Binarios Unidimensionales.
- Se presentó la Curva Característica del Ítem y se adoptó la función de enlace *logit*.

Síntesis

Se presentaron las bases matemático-estadísticas de los Modelos Logísticos de 1 y 2 parámetros desarrollados en la TRI a partir del concepto de regresión lineal.

- Se definieron los Modelos de Rasgos Latentes, los que consideran respuesta binaria llamados Modelos de Rasgos Latentes Binarios y a partir de ellos los que asumen una única variable latente, denominados Modelos de Rasgos Latentes Binarios Unidimensionales.
- Se presentó la Curva Característica del Ítem y se adoptó la función de enlace *logit*.
- Se realizó la correspondencia entre los coeficientes de regresión del MRLBU y los parámetros de discriminación y dificultad.

Contenido

- 1 Teoría de Respuesta al Ítem (TRI)
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario
 - Modelos de Rasgos Latentes Binario Unidimensional
- 2 Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem
 - Curva Característica del Ítem
 - Modelo Logístico de 2 parámetros
 - Modelo Logístico de 1 parámetro
 - Modelo de Rasch
- 3 Síntesis
- 4 Referencias

Referencias

- Bartholomew, D. J., Steele, F., Moustaki, I. y Galbraith, J. I. (2008). Analysis of multivariate social science data, Second Edition. Boca Ratón, EE. UU: Taylor y Francis Group.
- Lord, F. (1980). Applications of item response theory to practical testing problems. Hillsdale: Erlbaum Associates.
- Rasch, G. (1960). Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Copenhagen: The Danish Institute for Educational Research.

¡Muchas gracias por su atención!

Contacto

Janina Roldan

janiroldan@live.com.ar