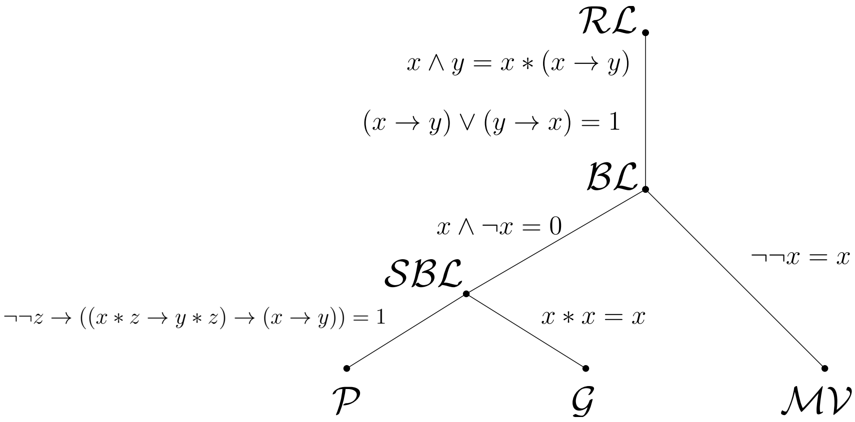
Algunos resultados sobre las álgebras producto monádicas

Cecilia Cimadamore

Departamento de Matemática,
Universidad Nacional del Sur (UNS),
Bahía Blanca

Junio, 2019


$\mathcal{RL}$
$x \wedge y = x * (x \to y)$
$(x \to y) \vee (y \to x) = 1$
$\mathcal{BL}$
$x \wedge \neg x = 0$
$\neg\neg x = x$
$\mathcal{SBL}$
$\neg\neg z \to ((x * z \to y * z) \to (x \to y)) = 1$
$x * x = x$
$\mathcal{P}$
$\mathcal{G}$
$\mathcal{MV}$

BL-algebras monádicas

Definición

$\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, *, \to, \forall, \exists, 0, 1\rangle$ es una MBL-algebra si $\langle A, \vee, \wedge, *, \to, 0, 1\rangle$ es una BL-algebra y:

1. $\forall x \to x \approx 1$.
2. $\forall(x \to \forall y) \approx \exists x \to \forall y$.
3. $\forall(\forall x \to y) \approx \forall x \to \forall y$.
4. $\forall(\exists x \vee y) \approx \exists x \vee \forall y$.
5. $\exists(x * x) \approx \exists x * \exists x$.

Castaño, Cimadamore, Díaz Varela, Rueda: *Monadic BL-algebras: the equivalent algebraic semantics of Hájek's monadic fuzzy logic*. Fuzzy Sets and Systems (2017)

Subvariedades importantes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{MBL} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathcal{MP} & \mathcal{MG} & \mathcal{MMV}
\end{tikzcd}$$

Álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{MP}$

Teorema

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MP}$. *Entonces*

$$Con_{\mathcal{MP}}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{F}_m(\mathbf{A}) \cong \mathbf{F}(\forall\mathbf{A}) \cong Con_{\mathcal{P}}(\forall\mathbf{A})$$

En consecuencia:

- $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible (simple) si y sólo si $\forall\mathbf{A}$ es un álgebra producto subdirectamente irreducible (simple).
- Si $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible entonces $\forall\mathbf{A}$ es totalmente ordenado.

Álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{MP}$

Teorema

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{MP}$. *Entonces*

$$Con_{\mathcal{MP}}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{F}_m(\mathbf{A}) \cong \mathbf{F}(\forall \mathbf{A}) \cong Con_{\mathcal{P}}(\forall \mathbf{A})$$

En consecuencia:

- $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible (simple) si y sólo si $\forall \mathbf{A}$ es un álgebra producto subdirectamente irreducible (simple).
- Si $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible entonces $\forall \mathbf{A}$ es totalmente ordenado.

Cuantificadores sobre cadenas

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{P}$, $a \in A$. Podemos definir

- $\forall a = \exists a = a$
- Monteiro-Baaz

$$\forall a = \Delta a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

$$\exists a = \nabla a = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Teorema

En una cadena podemos definir solamente los cuantificadores triviales.

Cuantificadores sobre cadenas

Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{P}$, $a \in A$. Podemos definir

- $\forall a = \exists a = a$
- Monteiro-Baaz

$$\forall a = \Delta a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

$$\exists a = \nabla a = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

Teorema

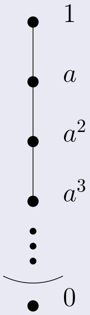
En una cadena podemos definir solamente los cuantificadores triviales.

Proposición

Si **A** *es una cadena producto monádica subdirectamente irreducible entonces:*

1. $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{2}, \Delta, \nabla)$, *o,*
2. $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega, \Delta, \nabla)$, *o,*
3. $\mathcal{V}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega, id, id)$.

$\mathbf{2} \oplus \mathrm{C}_\omega$



La variedad $\mathcal{P}_{\Delta\nabla}$

Definición

Una $\mathrm{P}_{\Delta\nabla}$-algebra es un álgebra producto monádica que satisface

$$\forall x \vee \neg\forall x \approx 1.$$

Lema

Las álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ son las álgebras en $\mathcal{MP}$ donde $\forall = \Delta$ y $\exists = \nabla$.

- $g(x, y) = \Delta(x \to y) * \Delta(y \to x)$. Entonces

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ 1 \text{ si } x = y \end{cases}.$$

- $t(x, y, z) = (g(x, y) \wedge z) \vee (g(g(x, y), 0) \wedge x) = \begin{cases} z \text{ si } x = y \\ x \text{ si } x \neq y \end{cases}$

  es un término discriminador.

La variedad $\mathcal{P}_{\Delta\nabla}$

Definición

Una $\mathrm{P}_{\Delta\nabla}$-algebra es un álgebra producto monádica que satisface

$$\forall x \vee \neg\forall x \approx 1.$$

Lema

Las álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ son las álgebras en $\mathcal{MP}$ donde $\forall = \Delta$ y $\exists = \nabla$.

- $g(x, y) = \Delta(x \to y) * \Delta(y \to x)$. Entonces
$$g(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ 1 \text{ si } x = y \end{cases} .$$
- $t(x, y, z) = (g(x, y) \wedge z) \vee (g(g(x, y), 0) \wedge x) = \begin{cases} z \text{ si } x = y \\ x \text{ si } x \neq y \end{cases}$

  es un término discriminador.

Subvariedades

Lema

Si $A \in \mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ y $A \models x \vee \neg x \approx 1$ entonces A es un álgebra de Boole monádica.

En $\mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ tendremos entonces una cadena infinita

$$\mathcal{V}(2) \subseteq \mathcal{V}(2^2, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}(2^k, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{MB}.$$

Consideremos $\langle [0,1]^k, \Delta, \nabla \rangle$, k entero positivo.

$$\mathcal{V}([0,1]) \subseteq \mathcal{V}([0,1]^2, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}([0,1]^k, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots$$

Subvariedades

Lema

Si $A \in \mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ y $A \models x \vee \neg x \approx 1$ entonces A es un álgebra de Boole monádica.

En $\mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ tendremos entonces una cadena infinita

$$\mathcal{V}(2) \subseteq \mathcal{V}(2^2, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}(2^k, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{MB}.$$

Consideremos $\langle [0,1]^k, \Delta, \nabla \rangle$, k entero positivo.

$$\mathcal{V}([0,1]) \subseteq \mathcal{V}([0,1]^2, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{V}([0,1]^k, \Delta, \nabla) \subseteq \cdots$$

- Si $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible en $\mathcal{V}(\langle [0,1]^k, \Delta, \nabla \rangle)$ entonces
  - $\mathbf{A}$ es simple
  - $\mathbf{A} \in \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}(\langle [0,1]^k, \Delta, \nabla \rangle))$.

Teorema

(Agliano, Montagna, 2003) Si $\mathbf{C}$ es un hoop cancelativo totalmente ordenado no trivial entonces

$$\mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}(\mathbf{C}) = \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}(\mathbf{C}_\omega).$$

Proposición

Sea $\mathbf{C}$ es un hoop cancelativo totalmente ordenado no trivial entonces

$$\mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}((\mathbf{2} \oplus \mathbf{C})^k, \Delta, \nabla) = \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}((\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega)^k, \Delta, \nabla).$$

- Si **A** es subdirectamente irreducible en $\mathcal{V}(\langle [0,1]^k, \Delta, \nabla \rangle)$ entonces
  - **A** es simple
  - $\mathbf{A} \in \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}(\langle [0,1]^k, \Delta, \nabla \rangle))$.

Teorema

(Agliano, Montagna, 2003) Si **C** *es un hoop cancelativo totalmente ordenado no trivial entonces*

$$\mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}(\mathbf{C}) = \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}(\mathbf{C}_\omega).$$

Proposición

Sea **C** *es un hoop cancelativo totalmente ordenado no trivial entonces*

$$\mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}((\mathbf{2} \oplus \mathbf{C})^k, \Delta, \nabla) = \mathrm{I}\,\mathrm{S}\,\mathrm{P_U}((\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega)^k, \Delta, \nabla).$$

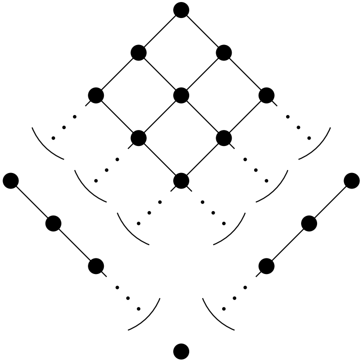
Variedades de ancho finito

Sea $\alpha_k(x_1, \cdots, x_{k+1}) = \left(\bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,k+1\},\ i \neq j} \Delta(x_i \vee x_j) \right) \to \bigvee_{j=1}^{k+1} \Delta x_j$.

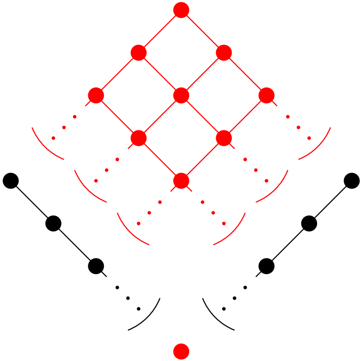
Proposición

Sea $A \in \mathcal{P}_{\Delta\nabla}$ subdirectamente irreducible. Entonces $\alpha_k \approx 1$ si y sólo si existe una representación subdirecta (del álgebra producto subyacente) $\mathbf{A} \leqslant \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$, donde cada $\mathbf{A}_i$ es una cadena producto y $|I| \leqslant k$.

Ancho booleano



Ancho booleano

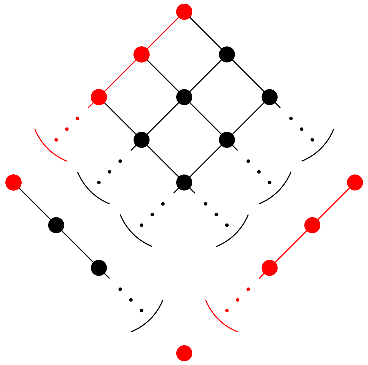


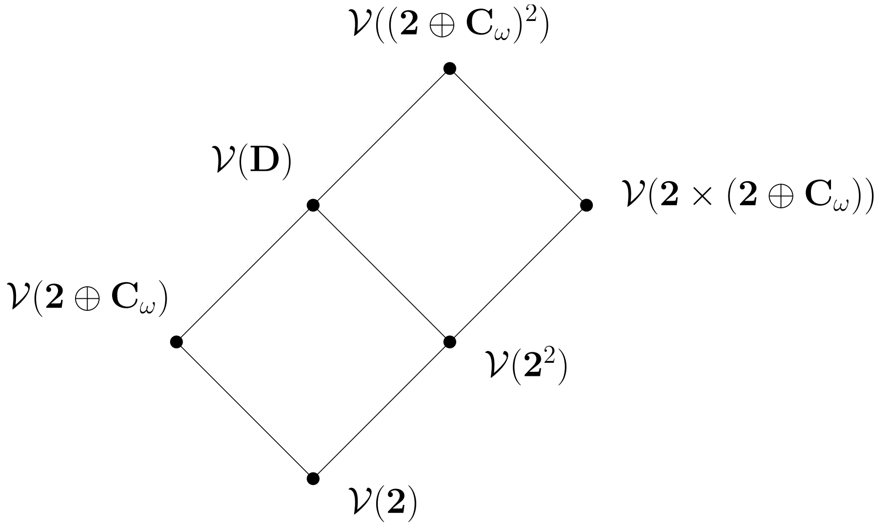
Sea $\beta_p(x_0, x_1, \cdots, x_{p+1}) = \bigvee_{i=0}^{p} \Delta(\neg\neg x_{i+1} \to \bigvee_{j=0}^{i} \neg\neg x_j)$.

Teorema

Sea A un álgebra de ancho k subdirectamente irreducible. Entonces

$\mathbf{A}$ *satisface* $\beta_p \approx 1$ *si y sólo si* $B(\mathbf{A})$ *es una subalgebra de* $\mathbf{2}^p$.




$\mathcal{V}((\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega)^2)$
$\mathcal{V}(\mathbf{D})$
$\mathcal{V}(\mathbf{2} \times (\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega))$
$\mathcal{V}(\mathbf{2} \oplus \mathbf{C}_\omega)$
$\mathcal{V}(\mathbf{2}^2)$
$\mathcal{V}(\mathbf{2})$

¡¡¡¡Gracias!!!!