Sobre una caracterizacón de las Álgebras de semi-Heyting

José L. Castiglioni [(1)], Victor Fernández [(2)],
Federico Mallea[(2)] y Hernán J. San Martín [(1)]

[(1)] Facultad de Ciencias Exactas (UNLP) y Conicet.

[(2)] Instituto de Ciencias Básicas (Área Matemática); UNSJ.

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro (2019)

Retículos hemi-implicativos

Un retículo hemi-implicativo es un álgebra $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que

(1) $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado,

(2) $a \rightarrow a = 1$ para todo $a \in H$,

(3) para todo $a, b, c \in H$, si $c \leq a \rightarrow b$ entonces $a \wedge c \leq b$.

Observación

Si $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado con una operación binaria $\rightarrow$, entonces H satisface la condición (3) si, y sólo si, tiene la condición $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$, para todo $a, b \in H$.

Con hIL indicaremos a la variedad cuyos elementos son los retículos hemi-implicativos.

Un retículo hemi-implicativo es un álgebra $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que

(1) $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado,

(2) $a \rightarrow a = 1$ para todo $a \in H$,

(3) para todo $a, b, c \in H$, si $c \leq a \rightarrow b$ entonces $a \wedge c \leq b$.

Observación

Si $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado con una operación binaria $\rightarrow$, entonces H satisface la condición (3) si, y sólo si, tiene la condición $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$, para todo $a, b \in H$.

Con hIL indicaremos a la variedad cuyos elementos son los retículos hemi-implicativos.

Definición [Sankappanavar]

Un álgebra de semi-Heyting es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que

- $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo acotado,
- $a \to a = 1$,
- $c \wedge (a \to b) = c \wedge [(a \wedge c) \to (b \wedge c)]$,
- $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

Teorema

Sea A un retículo acotado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es un álgebra de semi-Heyting.

(ii) (a) A es un retículo hemi-implicativo,
(b) $c \leq (a \to b) \leftrightarrow ((a \wedge c) \to (b \wedge c))$, para todo $a, b, c \in A$.

Definición [Sankappanavar]

Un álgebra de semi-Heyting es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que

- $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo acotado,
- $a \rightarrow a = 1$,
- $c \wedge (a \rightarrow b) = c \wedge [(a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)]$,
- $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.

Teorema

Sea A un retículo acotado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es un álgebra de semi-Heyting.

(ii) (a) A es un retículo hemi-implicativo,
(b) $c \leq (a \rightarrow b) \leftrightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$, para todo $a, b, c \in A$.

Observación

Las álgebras de semi-Heyting forman una subvariedad propia, SH, de hIL.

Ejemplo. Definimos $H_3 = \{0, a, 1\}$ una cadena de tres elementos, con $0 < a < 1$, y consideramos la operación binaria definida por

$\to$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	1
1	0	0	1

Nótese que $H_3 \in hIL$, sin embargo $H_3 \notin SH$ ya que

$$1 \wedge (1 \to a) \neq 1 \wedge a$$

Aplicaciones

Definición [San Martín]

Sea $H \in \mathrm{hIL}$ y F un filtro. Decimos que F es congruente si $t(a,b,c) = (a \to b) \leftrightarrow ((a \wedge c) \to (b \wedge c)) \in F$ para toda $a, b \in H$ y $c \in F$.

Teorema [San Martín]

Sea $H \in \mathrm{hIL}$. Existe un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de H y el retículo de los filtros congruentes de H, mediante la asignación $\theta \to 1/\theta$ y $F \to \Theta(F)$; donde $\Theta(F) = \{(x,y) : x \wedge f = y \wedge f,$ para algún $f \in F\}$

Aplicaciones

Definición [San Martín]

Sea $H \in \mathrm{hIL}$ y F un filtro. Decimos que F es congruente si $t(a,b,c) = (a \to b) \leftrightarrow ((a \wedge c) \to (b \wedge c)) \in F$ para toda $a, b \in H$ y $c \in F$.

Teorema [San Martín]

Sea $H \in \mathrm{hIL}$. Existe un isomorfismo entre el retículo de las congruencias de H y el retículo de los filtros congruentes de H, mediante la asignación $\theta \to 1/\theta$ y $F \to \Theta(F)$; donde $\Theta(F) = \{(x,y) : x \wedge f = y \wedge f$, para algún $f \in F\}$

Teorema

Sea $H \in hIL$. Entonces todo filtro de H es congruente si, y sólo si, (C) $c \leq t(a, b, c)$ para toda $a, b, c \in H$.

Corolario

Las álgebras de semi-Heyting forman una subvariedad propia, SH, de hIL, para la cual el retículo de filtros y el retículo de congruencias son isomorfos.

Teorema

Sea $H \in hIL$. Entonces todo filtro de H es congruente si, y sólo si, (C) $c \leq t(a, b, c)$ para toda $a, b, c \in H$.

Corolario

Las álgebras de semi-Heyting forman una subvariedad propia, SH, de hIL, para la cual el retículo de filtros y el retículo de congruencias son isomorfos.

Referencias

- Sankappanavar H.P, *Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras*. Actas del IX Congreso Dr. A.R. Monteiro, 33–66 (2008).
- San Martín H.J., *On congruences in weak implicative semi-lattices*. Soft Computing 21 (12), 3167-3176 (2017).

Gracias!