Un estudio algebraico de operadores temporales sobre álgebras de Nelson

Aldo V. Figallo[1], Gustavo Pelaitay[1], Jonathan Sarmiento[2]

(1) Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional San Juan.

(2) Departamento de Matemática (UNS) y Conicet.

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro (2019)

Introducción.

Las lógicas proposicionales, tanto clásicas como no clásicas usualmente no incorporan la dimensión del tiempo. Aristóteles ya había observado que el tiempo juega un papel importante en la evaluación de los valores de verdad de las proposiciones. Su ejemplo más conocido fue la declaración

"Mañana habrá una batalla naval"

Ciertamente, mañana quedará claro si esta proposición es verdadera o falsa, pero hoy no podemos asignar uno de estos valores. Por lo tanto, aceptó que la lógica de dos valores no puede capturar todo el pensamiento humano.

Algunos autores consideran a Arthur Prior como el iniciador de la disciplina conocida como "Lógica Temporal".
A partir de la obra

- A. Prior. *Papers on Time and Tense.* Oxford, Oxford University Press. 1968.

surge la lógica temporal formal moderna.

Para obtener lógicas temporales, se enriquece a la lógica proposicional dada con nuevos operadores unarios los cuales son usualmente denotados por G, H, F y P.

Prior "interpretó" a los cuatro operadores unarios del modo siguiente:

- G: "Será siempre en el futuro verdad".
- H: "Ha sido siempre en el pasado verdad".
- F: "Será alguna vez en el futuro verdad".
- P: "Fue alguna vez en el pasado verdad".

Estos operadores fueron introducidos por primera vez en la lógica proposicional clásica. Así, aparecieron las álgebras de Boole temporales (o álgebras temporales).

Las álgebras de Boole temporales son álgebras $(\mathcal{A}, G, H)$, donde $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y, G y H son operadores unarios sobre A que satisfacen los axiomas:

(B1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,
(B2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,
(B3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$.

donde $P(x) = \neg H(\neg x)$ y $F(x) = \neg G(\neg x)$.

Recientemente, varios autores han iniciado el estudio de operadores temporales sobre un contexto más general que el de las álgebras de Boole. Como por ejemplo:

- BAKHSHI,M.(2016).*Tense operators on non-commutative residuated lattices*. Soft Computing, 21(15), 4257-4268.
- BOTUR, M.; CHAJDA, I.; HALAŠ, R.; KOLARÍK, M. *Tense operators on basic algebras*. Internat. J. Theoret. Phys. 50(2011),no.12,3737-3749.
- CHAJDA, Ivan; PASEKA, Jan.*Tense Operators and Dynamic De Morgan Algebras*. ISMVL(2013), 219-224.

- CHAJDA, Ivan; PASEKA, Jan. *Tense operators in fuzzy logic*. Fuzzy Sets and Systems 276(2015), 100-113.
- DIACONESCU, D.; GEORGESCU, G. *Tense operators on MV-algebras and Łukasiewicz-Moisil algebras*. Fund. Inform., 81(2007), 4, 379-408.
- FIGALLO, Aldo V.; PASCUAL, Inés.; PELAITAY, Gustavo. *A topological duality for tense θ-valued Łukasiewicz-Moisil algebras*. Soft Comput. 23(2019),12, 3979-3997.
- FIGALLO, Aldo V.; PASCUAL, Inés.; PELAITAY, Gustavo. *A topological duality for tense LM_n-algebras and applications*. Log. J. IGPL 26(2018),no.4, 339-380.

- FIGALLO, Aldo V.; PELAITAY, Gustavo. *A representation theorem for tense $n \times m$-valued Łukasiewicz-Moisil algebras*. Math. Bohem. 140(2015),no.3, 345-360.
- FIGALLO Aldo V.; PELAITAY, Gustavo. *An algebraic axiomatization of Ewald's intuitionistic tense logic*. Soft. Comput.(2014) 18:1873-1883.
- FIGALLO Aldo V.; PELAITAY, Gustavo. *Tense Operators on De Morgan Algebras*. Log. J. IGPL 22(2014), no. 2, 255-267.

La noción de álgebra de Nelson o N-lattice introducida por H.Rasiowa

- RASIOWA, H. *N-lattices and constructive logic with strong negation*. Fund. Math.,46 (1958),61-80

cooresponde a la contraparte algebraica de la lógica constructiva con negación fuerte considerada por D.Nelson

- NELSON, D. *Constructible falsity*. The Jour of Symb. Logic,14 (1949),16-26.

y A.Markov

- MARKOV, A.A. *A constructive logic*. Uspehi Mathematiceskih Nauk(N.S.)Vol.5(1950),187-188.

Antonio Monteiro determinó algunos de los resultados más importantes sobre estas álgebras. En particular, fue el primero en indicar, en colaboración con Brignole, una definición ecuacional de las álgebras de Nelson.

- BRIGNOLE, D.;MONTEIRO, A. *Caractérization des algébres de Nelson par des egalités*. Proc. of Japan Academy, A3(1967),279-283,284-285.
- BRIGNOLE, D. *Equational characterization of Nelson algebras*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 10(1969), 285-297.

En este trabajo estudiaremos operadores temporales sobre álgebras de Nelson.

Preliminares. IKt–álgebra.

Las IKt–álgebras son la contrapartida algebraica de la Lógica Temporal Intuicionista IKt que fue introducida por Ewald como extensión del lenguaje de la lógica proposicional intuicionista con los operadores unarios G, H, F y P.

- W. B. Ewald, Intuitionistic tense and modal logic, J. Symbolic Logic 51 (1), 166-179, (1986)

Definición

Sea $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ un álgebra Heyting y sean G, H, F y P operaciones unarias sobre A que verifican:

(t1) $G(1) = 1$ y $H(1) = 1$,
(t2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$ y $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,
(t3) $x \leq GP(x)$ y $x \leq HF(x)$,
(t4) $F(0) = 0$ y $P(0) = 0$,
(t5) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$ y $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,
(t6) $PG(x) \leq x$ y $FH(x) \leq x$,
(t7) $F(x \Rightarrow y) \leq G(x) \Rightarrow F(y)$ y $P(x \Rightarrow y) \leq H(x) \Rightarrow P(y)$.

Entonces el álgebra $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ será llamada una IKt–álgebra y G, H, F y P serán llamados operadores temporales.

Dada $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ una IKt–álgebra. Se define sobre A la operación unaria d_* por:

$$d_*(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x), \text{ para cada } x \in A.$$

Para cada $n \in \omega$ se define recursivamente $d_*^n(x)$ por:

$$d_*^0(x) = x \ , \ d_*^{n+1}(x) = d_*(d_*^n(x)).$$

Además el conjunto de los elementos invariantes por d_* lo denotaremos por:

$$C(A) = \{a \in A : d_*(a) = a\}$$

Los siguientes resultados fueron probados por Aldo V. Figallo; Inés Pascual; Gustavo Pelaitay en el trabajo.

- Figallo, Aldo V; Pascual Inés; Pelaitay, Gustavo. *Subdirectly irreducible IKt–algebras*. Studia Logica 105 (2017),no.4,673-701

- Dada $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ una IKt–álgebra. Entonces

  $\langle C(A), \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting.

- Sea $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ una IKt–álgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

  (i) $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ es una IKt–álgebra simple,

  (ii) Para cada $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n \in \omega$ tal que $d_*^n(a) = 0$.

- Sea $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ una IKt–álgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

  (i) $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ es una IKt–algebra subdirectamente irreducible,

  (ii) Existe $b \in A \setminus \{1\}$, tal que para cada $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n \in \omega$ tal que $d_*^n(a) \leq b$.

- Sea $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ una IKt–álgebra finita, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

  (i) $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ es una IKt–álgebra simple,

  (ii) $C(A) = \{0, 1\}$,

  (iii) $\langle C(A), \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting simple.

- Sea $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ una IKt–álgebra finita, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

  (i) $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ es una IKt–algebra subdirectamente irreducible,

  (ii) Existe $u \in C(A) \setminus \{1\}$, tal que $c \leq u$ para todo $c \in C(A) \setminus \{1\}$.

  (iii) $\langle C(A), \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting subdirectamente irreducible.

Algebras de Nelson.

Definición

Un álgebra de Nelson es un álgebra $\mathcal{N} = \langle N, \vee, \wedge, \to, \sim, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$ *que verifica:*

(N0) $\langle N, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Kleene,*
(N1) $x \to x = 1$,
(N2) $(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z)$,
(N3) $x \wedge (x \to y) = x \wedge (\sim x \vee y)$.

Si existe un elemento $\delta \in N$ que verifica $\sim \delta = \delta$, se dira que $\mathcal{N}$ es un álgebra de Nelson centrada.

En un álgebra de Nelson se definen:

- $\Gamma x = x \to 0$,
- $\Delta x = \sim \Gamma x$,
- $x \rightarrowtail y = (x \to y) \wedge (y \to x)$

Operadores temporales sobre álgebras de Nelson.

Definición

Sea $\mathcal{N} = \langle N, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1 \rangle$ *un álgebra de Nelson y sean* $G, H : N \rightarrow N$ *dos operaciones unarias sobre* N*. Diremos que* $(\mathcal{N}, G, H)$ *es un* **álgebra de Nelson temporal** *si se satifacen los siguientes axiomas:*

(T1) $G(1) = 1$, $H(1) = 1$,
(T2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$, $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,
(T3) $x \leq GP(x)$, $x \leq HF(x)$,
(T4) $G(x \rightarrow y) \leq G(x) \rightarrow G(y)$, $H(x \rightarrow y) \leq H(x) \rightarrow H(y)$,
(T5) $G(x \rightarrow y) \leq F(x) \rightarrow F(y)$, $H(x \rightarrow y) \leq P(x) \rightarrow P(y)$, *donde* $P(x) = \sim H(\sim x)$ *y* $F(x) = \sim G(\sim x)$,

Proposición

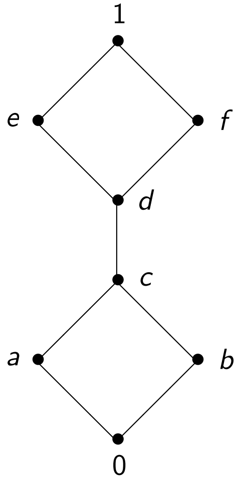
En toda álgebra de Nelson temporal $(\mathcal{N}, G, H)$, *se verifican:*

(T6) $F(0) = 0$ *y* $P(0) = 0$,
(T7) $F(x \vee y) = F(x) \vee F(y)$ *y* $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$,
(T8) $x \leq y$ *implica* $G(x) \leq G(y)$ *y* $H(x) \leq H(y)$
(T9) $x \leq y$ *implica* $F(x) \leq F(y)$ *y* $P(x) \leq P(y)$,
(T10) $PG(x) \leq x$ *y* $FH(x) \leq x$,
(T11) $G(x) \leq F(y) \to F(x \wedge y)$ *y* $H(x) \leq P(y) \to P(x \wedge y)$,

El siguiente ejemplo lo tomamos del trabajo de A. Monteiro

- Monteiro, A.*Construction des algebres de Nelson finies*. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, v.11(1963). 359-362.

Sea $\mathcal{N}$ el álgebra de Nelson cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



Las operaciones $\rightarrow$, $\sim$ están definidas en las siguientes tablas

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	1	1	1	1	1
d	c	c	c	c	1	1	1	1
e	b	c	b	c	f	1	f	1
f	a	a	c	c	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

x	$\sim x$
0	1
a	f
b	e
c	d
d	c
e	b
f	a
1	0

Definimos los operadores G y H como sigue

x	G(x)	H(x)
0	0	0
a	0	a
b	b	0
c	c	c
d	d	d
e	d	e
f	f	d
1	1	1

Entonces $(\mathcal{N}, G, H)$ es un álgebra de Nelson temporal

IKt–álgebras asociadas a un álgebra de Nelson temporal.

En esta sección mostraremos la relación existente entre *IKt*–álgebras y álgebras de Nelson temporales.

Dada un álgebra de Nelson $\mathcal{N} = \langle N, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, 0, 1 \rangle$,
En

- Vakarelov, D.: *Notes on N-lattices and constructive logic with strong negation*. Studia Logica. 36(1-2), 109-125 (1977)

Vakarelov probó que:

- La relación definida sobre N por:
  $x \approx y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$ y $y \rightarrow x = 1$
  es una relación de equivalencia, compatible con las operaciones $\vee$, $\wedge$ y $\rightarrow$.

Además

- $\mathcal{A}_{\approx} = \langle N/_{\approx}, \vee_{\approx}, \wedge_{\approx}, \Rightarrow_{\approx}, 0_{\approx}, 1_{\approx} \rangle$, es un algebra de Heyting.

Donde las operaciones están definidas por:

$$[x] \vee_{\approx} [y] = [x \vee y],$$
$$[x] \wedge_{\approx} [y] = [x \wedge y],$$
$$[x] \Rightarrow_{\approx} [y] = [x \rightarrow y],$$
$$0_{\approx} = [0] \ , \ 1_{\approx} = [1]$$

El orden en $N/_{\approx}$ está dado por:

$[x] \leq [y]$ si, y sólo si, $x \rightarrow y = 1$.

Lema

Si $(\mathcal{N}, G, H)$ *es un álgebra de Nelson temporal, entonces la relación* $\approx$ *es compatible con* G*,* H*,* F *y* P*.*

Teorema

Si $(\mathcal{N}, G, H)$ *es un álgebra de Nelson temporal, entonces* $(\mathcal{A}_{\approx}, G_{\approx}, H_{\approx}, F_{\approx}, P_{\approx})$ *es una IKt–álgebra. Donde* $G_{\approx}, H_{\approx}, F_{\approx}$ *y* $P_{\approx}$ *están definidas por*

(i) $G_{\approx}([x]) = [G(x)]$
(ii) $H_{\approx}([x]) = [H(x)]$
(iii) $F_{\approx}([x]) = [F(x)]$
(iv) $P_{\approx}([x]) = [P(x)]$

La siguiente *IKt*–álgebra la denominaremos "*Ikt*–álgebra asociada al álgebra de Nelson temporal".

Dada un álgebra de Nelson $\mathcal{N} = \langle N, \vee, \wedge, \to, \sim, 0, 1\rangle$, consideremos el subconjunto de N,

$$A^* = \{\Delta a : a \in N\}$$

En el conjunto A^* se definen las operaciones $\vee^*$, $\wedge^*$, $\Rightarrow^*$ por las fórmulas:

$$a \vee^* b = \Delta(a \vee b),$$
$$a \wedge^* b = \Delta(a \wedge b)$$
$$a \Rightarrow^* b = \Delta(a \to b).$$

En

- Sendlewski, A.: *Nelson algebras through Heyting ones:I.*. Studia Logica.49(1), 105-126 (1990)

Sendlewsky probo el siguiente resultado:

- $\mathcal{A}^* = \langle A^*, \vee^*, \wedge^*, \Rightarrow^*, 0, 1\rangle$ es un algebra de Heyting.

Teorema

Si $(\mathcal{N}, G, H)$ es un álgebra de Nelson temporal, entonces $(\mathcal{A}^*, G^*, H^*, F^*, P^*)$ es una IKt–álgebra. Donde G^*, H^*, F^* y P^* están definidas por

(i) $G^*(\Delta a) = \Delta G(a)$
(ii) $H^*(\Delta a) = \Delta H(a)$
(iii) $F^*(\Delta a) = \Delta F(a)$
(iv) $P^*(\Delta a) = \Delta P(a)$

Observación

Las IKt-álgebras definidas anteriormente $(\mathcal{A}_{\approx}, G_{\approx}, H_{\approx}, F_{\approx}, P_{\approx})$ *y* $(\mathcal{A}^*, G^*, H^*, F^*, P^*)$ *son isomorfas.*

Vamos a construir la IKt-álgebra $(\mathcal{A}^*, G^*, H^*, F^*, P^*)$ asociada al álgebra de Nelson temporal $(\mathcal{N}, G, H)$ del Ejemplo 1.

(1) Completamos información en la siguiente tabla

x	G(x)	H(x)	F(x)	P(x)	Δx	d(x)	$\Delta d(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	c	0	0	0
b	b	0	c	b	0	0	0
c	c	c	c	c	0	c	0
d	d	d	d	d	d	d	d
e	d	e	e	1	e	d	d
f	f	d	1	f	f	d	d
1	1	1	1	1	1	1	1

Ejemplo 2

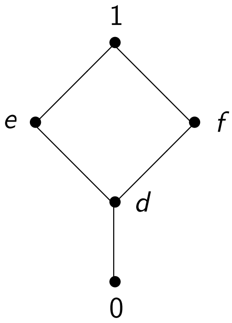
(2) Hallamos el álgebra de Heyting $\mathcal{A}^* = \langle A^*, \vee^*, \wedge^*, \Rightarrow^*, 0, 1\rangle$,

$$A^* = \{x \in N : x = \Delta x\} = \{0, d, e, f, 1\}$$

La siguiente tabla muestra la implicación intuicionista $\Rightarrow^*$

$\Rightarrow^*$	0	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1
e	0	f	1	f	1
f	0	e	e	1	1
1	0	d	e	f	1

El diagrama de Hasse correspondiente es el siguiente



Los operadores temporales y la operación d_* estan definidos en la siguiente tabla

x	$G^*(x)$	$H^*(x)$	$F^*(x)$	$P^*(x)$	$d_*(x)$
0	0	0	0	0	0
d	d	d	d	d	d
e	d	e	e	1	d
f	f	d	1	f	d
1	1	1	1	1	1

Congruencias y sistemas deductivos temporales.

Definición

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal. Un subconjunto D de N es un sistema deductivo temporal, si satisface:

- (D1) $1 \in D$,
- (D2) Si $x, x \rightarrow y \in D$ entonces $y \in D$,
- (D3) $G(x), H(x) \in D$, para todo $x \in D$.

Notaremos con $\mathcal{D}_T(\mathcal{N})$ al conjunto de todos los sistemas deductivos temporales de $\mathcal{N}$ y con $Con_T(\mathcal{N})$ al conjunto de congruencias de álgebras de Nelson temporales.

Proposición

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal y $D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})$. Entonces se verifica:

Si $x \rightarrowtail y \in D$ entonces $G(x) \rightarrowtail G(y) \in D$ y $H(x) \rightarrowtail H(y) \in D$.

Lema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal y $D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})$. Entonces la relación $R(D)$ es una congruencia de álgebra de Nelson temporal. Donde

$$R(D) = \{(x, y) \in N \times N : x \rightarrowtail y \in D,\ y \rightarrowtail x \in D\}$$

Lema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal. Entonces

$$Con_T(\mathcal{N}) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})\}$$

Definición

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal. Definimos $d : N \to N$ la operación unaria sobre N por:

$$d(x) = G(x) \wedge x \wedge H(x), \text{ para cada } x \in N.$$

Para cada $n \in \omega$ definimos recursivamente $d^n(x)$ por:

$$d^0(x) = x \ , \ d^{n+1}(x) = d(d^n(x)).$$

Y el conjunto de elementos Δd-invariantes por:

$$I(N) = \{x \in N : x = \Delta d(x)\}$$

Lema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- (d_1) $d^{n+1}(x) \leq d^n(x)$,
- (d_2) $d^n(0) = 0$ y $d^n(1) = 1$,
- (d_3) $d^n(x \wedge y) = d^n(x) \wedge d^n(y)$,
- (d_4) si $x \leq y$ entonces $d^n(x) \leq d^n(y)$,
- (d_5) $d(x \to y) \leq d(x) \to d(y)$,
- (d_6) $d^n(x \to y) \leq d^n(x) \to d^n(y)$,
- (d_7) Si $D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})$ entonces $d^n(x) \in D$ para todo $x \in D$,
- (d_8) Si $x = d(x)$ entonces $x = d^n(x)$,
- (d_9) Si $x = \Delta d(x)$ entonces $x = \Delta x = d^n(x)$.

Teorema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})$

(ii) $D \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$ *y verifica:*

(D3') $d(x) \in D$, *para todo* $x \in D$

Teorema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal y $a \in N$, entonces el sistema deductivo temporal en N generado por $\{a\}$, que denotaremos por $\langle a \rangle$ tiene la siguiente forma:

$$\langle a \rangle = \{x \in N : d^n(a) \to x = 1, \ \textit{para algún } n \in \omega\}$$

Lema

Sean $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal, $D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})$ y $a \in N$. Entonces el sistema deductivo temporal en N generado por $D \cup \{a\}$ que denotaremos por $\langle D, a\rangle$ tiene la siguiente forma:

$$\langle D, a\rangle = \{x \in N : d^n(a) \to x \in D, \ \textit{para algún } n \in \omega\}.$$

Lema

(Compacidad) Sean $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal y H una parte no vacía de N, entonces el sistema deductivo temporal generado por H que denotaremos por $\langle H \rangle$ tiene la siguiente forma:

$$\langle H \rangle = \{x \in N : d^p\left(\bigwedge_{i=1}^{n} h_i\right) \to x = 1, \ \textit{para algún } p \in \omega \ \textit{y} \ \{h_i\}_i^n \subseteq H\}.$$

Lema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal y $(\mathcal{A}^*, G^*, H^*, F^*, P^*)$ su IKt–álgebra asociada.

Si consideramos la operación unaria d_* sobre A^* dada por $d_*(x) = G^*(x) \wedge^* x \wedge^* H^*(x)$ entonces se verifica:

$$d_*^n(x) = \Delta d^n(x), \text{ para todo } x \in A^*.$$

Proposición

Si $(\mathcal{N}, G, H)$ *es un álgebra de Nelson temporal, entonces*

$$I(N) = \{a \in N : \Delta d(a) = a\} = \{a \in A^* : d_*(a) = a\} = C(A^*)$$

Proposición

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ *un álgebra de Nelson temporal, entonces* $\langle I(N), \vee^*, \wedge^*, \rightarrow^*, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Heyting.*

Dada una IKt–álgebra $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$ denotaremos por $\mathcal{D}_{IKt}(\mathcal{A})$ el retículo de sistemas deductivos de $(\mathcal{A}, G, H, F, P)$.

Lema

Sea $(\mathcal{N}, G, H)$ un álgebra de Nelson temporal y consideremos la IKt–álgebra asociada $(\mathcal{A}^*, G^*, H^*, F^*, P^*)$. Entonces se verifica: $D^* = D \cap A^* \in \mathcal{D}_{IKt}(\mathcal{A}^*)$, para todo $D \in \mathcal{D}_T(\mathcal{N})$.

Teorema

Si $(\mathcal{N}, G, H)$ *es un álgebra de Nelson temporal, entonces el conjunto ordenado* $(\mathcal{D}_T(\mathcal{N}), \subseteq)$ *es isomorfo al conjunto ordenado* $(\mathcal{D}_{IKt}(\mathcal{A}^*), \subseteq)$.

Corolario

El retículo de las congruencias temporales de un álgebra de Nelson temporal $\mathcal{N}$ *es isomorfo al retículo de las congruencias temporales de su IKt-álgebra asociada* $\mathcal{A}^*$.

¡Muchas gracias por su atención!