Orden sobre las Δ_1-compleción de un poset

Luciano J. González

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca
2019

Objetivo

El objetivo de esta comunicación es introducir un orden parcial sobre el conjunto de las Δ_1-compleciones de un conjunto parcialmente ordenado tal que

- Para ciertas clases de Δ_1-compleciones sea un retículo completo.
- Extienda el orden parcial considerado sobre las compleciones superiores (join-completions).

Definiciones preliminares

Un par $\langle L, e\rangle$ es una **compleción** de un poset P si L es un retículo completo y $e\colon P \to L$ es una inmersión de orden.

Una compleción $\langle L, e\rangle$ es llamada una **compleción superior** de P si $e[P]$ es denso superiormente (esto es, para todo $u \in L$, existe $A \subseteq P$ tal que $u = \bigvee e[A]$).

Denotamos por $\mathbb{J}(P)$ todas las compleciones superiores de P. (Dualmente, $\mathbb{M}(P)$).

Definiciones preliminares

Un par $\langle L, e\rangle$ es una **compleción** de un poset P si L es un retículo completo y $e\colon P \to L$ es una inmersión de orden.

Una compleción $\langle L, e\rangle$ es llamada una **compleción superior** de P si $e[P]$ es denso superiormente (esto es, para todo $u \in L$, existe $A \subseteq P$ tal que $u = \bigvee e[A]$).

Denotamos por $\mathbb{J}(P)$ todas las compleciones superiores de P. (Dualmente, $\mathbb{M}(P)$).

Definiciones preliminares

Un par $\langle L, e\rangle$ es una **compleción** de un poset P si L es un retículo completo y $e\colon P \to L$ es una inmersión de orden.

Una compleción $\langle L, e\rangle$ es llamada una **compleción superior** de P si $e[P]$ es denso superiormente (esto es, para todo $u \in L$, existe $A \subseteq P$ tal que $u = \bigvee e[A]$).

Denotamos por $\mathbb{J}(P)$ todas las compleciones superiores de P. (Dualmente, $\mathbb{M}(P)$).

Orden en $\mathbb{J}(P)$

Definición

Diremos que dos compleciones $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ son **equivalentes** ($L_1 \equiv L_2$) si y sólo si existe un isomorfismo $\alpha\colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$.

Denotamos al conjunto cociente $\mathbb{J}(P)/\equiv$ simplemente por $\mathbb{J}(P)$.

Proposición

Si se define la relación $\leq_0$ sobre $\mathbb{J}(P)$ por: $L_1 \leq_0 L_2$ si y sólo si existe una inmersión de orden $\alpha\colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, entonces $\langle \mathbb{J}(P), \leq_0\rangle$ es un retículo completo.

El primer y último elemento de $\langle \mathbb{J}(P), \leq_0\rangle$ son respectivamente la compleción Dedekind-MacNeille y $\mathcal{D}(P)$.

Orden en $\mathbb{J}(P)$

Definición

Diremos que dos compleciones $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ son **equivalentes** ($L_1 \equiv L_2$) si y sólo si existe un isomorfismo $\alpha\colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$.

Denotamos al conjunto cociente $\mathbb{J}(P)/\equiv$ simplemente por $\mathbb{J}(P)$.

Proposición

Si se define la relación $\leq_0$ sobre $\mathbb{J}(P)$ por: $L_1 \leq_0 L_2$ si y sólo si existe una inmersión de orden $\alpha\colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, entonces $\langle \mathbb{J}(P), \leq_0\rangle$ es un retículo completo.

El primer y último elemento de $\langle \mathbb{J}(P), \leq_0\rangle$ son respectivamente la compleción Dedekind-MacNeille y $\mathcal{D}(P)$.

Orden en $\mathbb{J}(P)$

Definición

Diremos que dos compleciones $\langle L_1, e_1 \rangle$ y $\langle L_2, e_2 \rangle$ son **equivalentes** ($L_1 \equiv L_2$) si y sólo si existe un isomorfismo $\alpha \colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$.

Denotamos al conjunto cociente $\mathbb{J}(P)/\equiv$ simplemente por $\mathbb{J}(P)$.

Proposición

Si se define la relación $\leq_0$ sobre $\mathbb{J}(P)$ por: $L_1 \leq_0 L_2$ si y sólo si existe una inmersión de orden $\alpha \colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, entonces $\langle \mathbb{J}(P), \leq_0 \rangle$ es un retículo completo.

El primer y último elemento de $\langle \mathbb{J}(P), \leq_0 \rangle$ son respectivamente la compleción Dedekind-MacNeille y $\mathcal{D}(P)$.

Orden en $\mathbb{J}(P)$

Definición

Diremos que dos compleciones $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ son **equivalentes** ($L_1 \equiv L_2$) si y sólo si existe un isomorfismo $\alpha\colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$.

Denotamos al conjunto cociente $\mathbb{J}(P)/\equiv$ simplemente por $\mathbb{J}(P)$.

Proposición

Si se define la relación $\preceq_0$ sobre $\mathbb{J}(P)$ por: $L_1 \preceq_0 L_2$ si y sólo si existe una inmersión de orden $\alpha\colon L_1 \to L_2$ tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, entonces $\langle \mathbb{J}(P), \preceq_0\rangle$ es un retículo completo.

El primer y último elemento de $\langle \mathbb{J}(P), \preceq_0\rangle$ son respectivamente la compleción Dedekind-MacNeille y $\mathcal{D}(P)$.

Δ_1-compleciones

Definición

Una Δ_1-compleción de P es una compleción $\langle L, e\rangle$ tal que cada elemento de L es un supremo de ínfimos de $e[P]$ y un ínfimo de supremos de $e[P]$.

Sea $\langle L, e\rangle$ una Δ_1-compleción de P. Definimos:

- $\mathrm{O}(L) = \{y \in L : \exists\, I \in \mathcal{D}(P) \text{ tq } y = \bigvee e[I]\}$.
- $\mathrm{K}(L) = \{x \in L : \exists\, F \in \mathcal{U}(P) \text{ tq } x = \bigwedge e[F]\}$.

Observación

Si $\langle L, e\rangle$ es una Δ_1-compleción de P, entonces

- $\mathrm{K}(L)$ es denso superiormente en L, y $\langle \mathrm{K}(L), e\rangle$ es una compleción inferior de P.
- $\mathrm{O}(L)$ es denso inferiormente en L, y $\langle \mathrm{O}(L), e\rangle$ es una compleción superior de P.

Δ_1-compleciones

Definición

Una Δ_1-compleción de P es una compleción $\langle L, e\rangle$ tal que cada elemento de L es un supremo de ínfimos de $e[P]$ y un ínfimo de supremos de $e[P]$.

Sea $\langle L, e\rangle$ una Δ_1-compleción de P. Definimos:

- $\mathrm{O}(L) = \{y \in L : \exists\, I \in \mathcal{D}(P) \text{ tq } y = \bigvee e[I]\}$.
- $\mathrm{K}(L) = \{x \in L : \exists\, F \in \mathcal{U}(P) \text{ tq } x = \bigwedge e[F]\}$.

Observación

Si $\langle L, e\rangle$ es una Δ_1-compleción de P, entonces

- $\mathrm{K}(L)$ es denso superiormente en L, y $\langle \mathrm{K}(L), e\rangle$ es una compleción inferior de P.
- $\mathrm{O}(L)$ es denso inferiormente en L, y $\langle \mathrm{O}(L), e\rangle$ es una compleción superior de P.

Δ_1-compleciones

Definición

Una Δ_1-compleción de P es una compleción $\langle L, e\rangle$ tal que cada elemento de L es un supremo de ínfimos de $e[P]$ y un ínfimo de supremos de $e[P]$.

Sea $\langle L, e\rangle$ una Δ_1-compleción de P. Definimos:

- $\mathrm{O}(L) = \{y \in L : \exists\, I \in \mathcal{D}(P) \text{ tq } y = \bigvee e[I]\}$.
- $\mathrm{K}(L) = \{x \in L : \exists\, F \in \mathcal{U}(P) \text{ tq } x = \bigwedge e[F]\}$.

Observación

Si $\langle L, e\rangle$ es una Δ_1-compleción de P, entonces

- $\mathrm{K}(L)$ es denso superiormente en L, y $\langle \mathrm{K}(L), e\rangle$ es una compleción inferior de P.
- $\mathrm{O}(L)$ es denso inferiormente en L, y $\langle \mathrm{O}(L), e\rangle$ es una compleción superior de P.

Δ_1-compleciones

Definición

Una Δ_1-compleción de P es una compleción $\langle L, e\rangle$ tal que cada elemento de L es un supremo de ínfimos de $e[P]$ y un ínfimo de supremos de $e[P]$.

Sea $\langle L, e\rangle$ una Δ_1-compleción de P. Definimos:

- $\mathrm{O}(L) = \{y \in L : \exists I \in \mathcal{D}(P) \text{ tq } y = \bigvee e[I]\}$.
- $\mathrm{K}(L) = \{x \in L : \exists F \in \mathcal{U}(P) \text{ tq } x = \bigwedge e[F]\}$.

Observación

Si $\langle L, e\rangle$ es una Δ_1-compleción de P, entonces

- $\mathrm{K}(L)$ es denso superiormente en L, y $\langle \mathrm{K}(L), e\rangle$ es una compleción inferior de P.
- $\mathrm{O}(L)$ es denso inferiormente en L, y $\langle \mathrm{O}(L), e\rangle$ es una compleción superior de P.

Δ_1-compleciones

Definición

Una Δ_1-compleción de P es una compleción $\langle L, e\rangle$ tal que cada elemento de L es un supremo de ínfimos de $e[P]$ y un ínfimo de supremos de $e[P]$.

Sea $\langle L, e\rangle$ una Δ_1-compleción de P. Definimos:

- $\mathrm{O}(L) = \{y \in L : \exists\, I \in \mathcal{D}(P) \ \text{tq} \ y = \bigvee e[I]\}$.
- $\mathrm{K}(L) = \{x \in L : \exists\, F \in \mathcal{U}(P) \ \text{tq} \ x = \bigwedge e[F]\}$.

Observación

Si $\langle L, e\rangle$ es una Δ_1-compleción de P, entonces

- $\mathrm{K}(L)$ es denso superiormente en L, y $\langle \mathrm{K}(L), e\rangle$ es una compleción inferior de P.
- $\mathrm{O}(L)$ es denso inferiormente en L, y $\langle \mathrm{O}(L), e\rangle$ es una compleción superior de P.

Δ_1-compleciones

Definición

Una Δ_1-compleción de P es una compleción $\langle L, e \rangle$ tal que cada elemento de L es un supremo de ínfimos de $e[P]$ y un ínfimo de supremos de $e[P]$.

Sea $\langle L, e \rangle$ una Δ_1-compleción de P. Definimos:

- $\mathrm{O}(L) = \{y \in L : \exists\, I \in \mathcal{D}(P) \ \text{ tq } \ y = \bigvee e[I]\}$.
- $\mathrm{K}(L) = \{x \in L : \exists\, F \in \mathcal{U}(P) \ \text{ tq } \ x = \bigwedge e[F]\}$.

Observación

Si $\langle L, e \rangle$ es una Δ_1-compleción de P, entonces

- $\mathrm{K}(L)$ es denso superiormente en L, y $\langle \mathrm{K}(L), e \rangle$ es una compleción inferior de P.
- $\mathrm{O}(L)$ es denso inferiormente en L, y $\langle \mathrm{O}(L), e \rangle$ es una compleción superior de P.

Δ_1-compleciones

Teorema(Gehrke et al. Theo. 3.4)
Hay una correspondencia biunívoca entre las Δ_1-compleciones de P y las polaridades $\langle K, O, R\rangle$ tales que:

1. $\langle K, e_K\rangle$ es un compleción inferior de P.
2. $\langle O, e_O\rangle$ es una compleción superior de P.
3. $R \subseteq K \times O$ cumple que:
   3.1 $\forall a \in P, x \in K \quad (x \leq_K e_K(a) \iff x \, R \, e_O(a))$;
   3.2 $\forall a \in P, y \in O \quad (e_O(a) \leq_O y \iff e_K(a) \, R \, y)$;
   3.3 $\forall x, x' \in K, y \in O \quad (x \leq_K x' \, R \, y \implies x \, R \, y)$;
   3.4 $\forall x \in K, y, y' \in O \quad (x \, R \, y \leq_O y' \implies x \, R \, y)$.

Δ_1-compleciones

Teorema(Gehrke et al. Theo. 3.4)
Hay una correspondencia biunívoca entre las Δ_1-compleciones de P y las polaridades $\langle K, O, R\rangle$ tales que:

1. $\langle K, e_K\rangle$ es un compleción inferior de P.
2. $\langle O, e_O\rangle$ es una compleción superior de P.
3. $R \subseteq K \times O$ cumple que:
   3.1 $\forall a \in P, x \in K \quad (x \leq_K e_K(a) \iff x \; R \; e_O(a))$;
   3.2 $\forall a \in P, y \in O \quad (e_O(a) \leq_O y \iff e_K(a) \; R \; y)$;
   3.3 $\forall x, x' \in K, y \in O \quad (x \leq_K x' \; R \; y \implies x \; R \; y)$;
   3.4 $\forall x \in K, y, y' \in O \quad (x \; R \; y \leq_O y' \implies x \; R \; y)$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1(P)$.

Sean $\langle L_1, e_1 \rangle$ y $\langle L_2, e_2 \rangle$ Δ_1-compleciones de P.

Definición

Diremos que $\alpha \colon L_1 \to L_2$ es una Δ_1-inmersión si es una inmersión de orden tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, y

$$\alpha\,[\mathrm{K}(L_1)] \subseteq \mathrm{K}(L_2) \ \text{ y } \ \alpha\,[\mathrm{O}(L_1)] \subseteq \mathrm{O}(L_2).$$

Definición

Definimos la relación $\preceq$ sobre $\Delta_1(P)$ por:

$$L_1 \preceq L_2 \iff \text{existe una } \Delta_1\text{-inmersión } \alpha \colon L_1 \to L_2.$$

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ y $L_2 \preceq L_1$ si y sólo si $L_1 \equiv L_2$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1(P)$.

Sean $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ Δ_1-compleciones de P.

Definición

Diremos que $\alpha\colon L_1 \to L_2$ es una Δ_1-inmersión si es una inmersión de orden tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, y

$$\alpha\,[\mathrm{K}(L_1)] \subseteq \mathrm{K}(L_2) \;\text{ y }\; \alpha\,[\mathrm{O}(L_1)] \subseteq \mathrm{O}(L_2).$$

Definición

Definimos la relación $\preceq$ sobre $\Delta_1(P)$ por:

$$L_1 \preceq L_2 \iff \text{existe una } \Delta_1\text{-inmersión } \alpha\colon L_1 \to L_2.$$

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ y $L_2 \preceq L_1$ si y sólo si $L_1 \equiv L_2$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1(P)$.

Sean $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ Δ_1-compleciones de P.

Definición

Diremos que $\alpha\colon L_1 \to L_2$ es una Δ_1-inmersión si es una inmersión de orden tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, y

$$\alpha\,[\mathrm{K}(L_1)] \subseteq \mathrm{K}(L_2) \;\text{ y }\; \alpha\,[\mathrm{O}(L_1)] \subseteq \mathrm{O}(L_2).$$

Definición

Definimos la relación $\preceq$ sobre $\Delta_1(P)$ por:

$$L_1 \preceq L_2 \iff \text{existe una } \Delta_1\text{-inmersión } \alpha\colon L_1 \to L_2.$$

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ y $L_2 \preceq L_1$ si y sólo si $L_1 \equiv L_2$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1(P)$.

Sean $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ Δ_1-compleciones de P.

Definición

Diremos que $\alpha\colon L_1 \to L_2$ es una Δ_1-inmersión si es una inmersión de orden tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, y

$$\alpha\,[\mathrm{K}(L_1)] \subseteq \mathrm{K}(L_2) \ \text{ y } \ \alpha\,[\mathrm{O}(L_1)] \subseteq \mathrm{O}(L_2).$$

Definición

Definimos la relación $\preceq$ sobre $\Delta_1(P)$ por:

$$L_1 \preceq L_2 \iff \text{existe una } \Delta_1\text{-inmersión } \alpha\colon L_1 \to L_2.$$

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ y $L_2 \preceq L_1$ si y sólo si $L_1 \equiv L_2$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1(P)$.

Sean $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ Δ_1-compleciones de P.

Definición

Diremos que $\alpha\colon L_1 \to L_2$ es una Δ_1-inmersión si es una inmersión de orden tal que $\alpha \circ e_1 = e_2$, y

$$\alpha\,[\mathrm{K}(L_1)] \subseteq \mathrm{K}(L_2) \ \text{ y } \ \alpha\,[\mathrm{O}(L_1)] \subseteq \mathrm{O}(L_2).$$

Definición

Definimos la relación $\preceq$ sobre $\Delta_1(P)$ por:

$$L_1 \preceq L_2 \iff \text{existe una } \Delta_1\text{-inmersión } \alpha\colon L_1 \to L_2.$$

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ y $L_2 \preceq L_1$ si y sólo si $L_1 \equiv L_2$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Proposición

Los posets $\langle \mathbb{J}(P), \preceq_0 \rangle$ y $\langle \mathbb{M}(P), \preceq_0 \rangle$ son sub-posets de $\langle \Delta_1(P), \preceq \rangle$.

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ si y sólo si se satisface lo siguiente:

1. Existe una inmersión de orden $\alpha_K \colon \mathrm{K}(L_1) \to \mathrm{K}(L_2)$ tal que $\alpha_K \circ e_1 = e_2$;
2. Existe una inmersión de orden $\alpha_O \colon \mathrm{O}(L_1) \to \mathrm{O}(L_2)$ tal que $\alpha_O \circ e_1 = e_2$;
3. $\forall x \in \mathrm{K}(L_1), y \in \mathrm{O}(L_1), x \leq_1 y \iff \alpha_K(x) \leq_2 \alpha_O(y)$.

Orden parcial sobre las Δ_1-compleciones

Proposición

Los posets $\langle \mathbb{J}(P), \preceq_0 \rangle$ y $\langle \mathbb{M}(P), \preceq_0 \rangle$ son sub-posets de $\langle \Delta_1(P), \preceq \rangle$.

Proposición

$L_1 \preceq L_2$ si y sólo si se satisface lo siguiente:

1. Existe una inmersión de orden $\alpha_K \colon \mathrm{K}(L_1) \to \mathrm{K}(L_2)$ tal que $\alpha_K \circ e_1 = e_2$;
2. Existe una inmersión de orden $\alpha_O \colon \mathrm{O}(L_1) \to \mathrm{O}(L_2)$ tal que $\alpha_O \circ e_1 = e_2$;
3. $\forall x \in \mathrm{K}(L_1), y \in \mathrm{O}(L_1), x \leq_1 y \iff \alpha_K(x) \leq_2 \alpha_O(y)$.

Δ_1-compleciones compactas

Definición

Una Δ_1-compleción de un poset P es llamada **compacta** si para todos $x \in \mathrm{K}(L)$ e $y \in \mathrm{O}(L)$, $x \leq y$ implica que existe $a \in P$ tal que $x \leq e(a) \leq y$.

Lema

Si $\langle L, e \rangle$ es una Δ_1-compleción compacta de P, entonces $e[P] = \mathrm{K}(L) \cap \mathrm{O}(L)$.

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$.

Proposición

Sean $\langle L_1, e_1 \rangle$ y $\langle L_2, e_2 \rangle$ Δ_1-compleciones compactas. Entonces,

$$L_1 \leq L_2 \iff \mathrm{K}(L_1) \leq_0 \mathrm{K}(L_2) \text{ y } \mathrm{O}(L_1) \leq_0 \mathrm{O}(L_2).$$

Δ_1-compleciones compactas

Definición

Una Δ_1-compleción de un poset P es llamada **compacta** si para todos $x \in \mathrm{K}(L)$ e $y \in \mathrm{O}(L)$, $x \leq y$ implica que existe $a \in P$ tal que $x \leq e(a) \leq y$.

Lema

Si $\langle L, e\rangle$ es una Δ_1-compleción compacta de P, entonces $e[P] = \mathrm{K}(L) \cap \mathrm{O}(L)$.

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$.

Proposición

Sean $\langle L_1, e_1\rangle$ y $\langle L_2, e_2\rangle$ Δ_1-compleciones compactas. Entonces,

$$L_1 \leq L_2 \iff \mathrm{K}(L_1) \leq_0 \mathrm{K}(L_2) \text{ y } \mathrm{O}(L_1) \leq_0 \mathrm{O}(L_2).$$

Δ_1-compleciones compactas

Definición

Una Δ_1-compleción de un poset P es llamada **compacta** si para todos $x \in \mathrm{K}(L)$ e $y \in \mathrm{O}(L)$, $x \leq y$ implica que existe $a \in P$ tal que $x \leq e(a) \leq y$.

Lema

Si $\langle L, e \rangle$ es una Δ_1-compleción compacta de P, entonces $e[P] = \mathrm{K}(L) \cap \mathrm{O}(L)$.

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$.

Proposición

Sean $\langle L_1, e_1 \rangle$ y $\langle L_2, e_2 \rangle$ Δ_1-compleciones compactas. Entonces,

$$L_1 \leq L_2 \iff \mathrm{K}(L_1) \leq_0 \mathrm{K}(L_2) \text{ y } \mathrm{O}(L_1) \leq_0 \mathrm{O}(L_2).$$

Δ_1-compleciones compactas

Definición

Una Δ_1-compleción de un poset P es llamada **compacta** si para todos $x \in \mathrm{K}(L)$ e $y \in \mathrm{O}(L)$, $x \leq y$ implica que existe $a \in P$ tal que $x \leq e(a) \leq y$.

Lema

Si $\langle L, e \rangle$ es una Δ_1-compleción compacta de P, entonces $e[P] = \mathrm{K}(L) \cap \mathrm{O}(L)$.

Denotamos al conjunto cociente $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)/\equiv$ simplemente por $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$.

Proposición

Sean $\langle L_1, e_1 \rangle$ y $\langle L_2, e_2 \rangle$ Δ_1-compleciones compactas. Entonces,

$$L_1 \preceq L_2 \iff \mathrm{K}(L_1) \preceq_0 \mathrm{K}(L_2) \text{ y } \mathrm{O}(L_1) \preceq_0 \mathrm{O}(L_2).$$

Δ_1-compleciones compactas

Proposición

Sea $\langle K, e_K \rangle$ una compleción inferior de P y $\langle O, e_O \rangle$ una compleción superior de P. Si $R^* \subseteq K \times O$ es definida por

$$x \, R^* \, y \iff \exists a \in P \, (x \leq_K e_K(a) \ \text{ y } \ e_O(a) \leq_O y),$$

entonces $\langle K, O, R^* \rangle$ es una GJP-polaridad compacta.

Δ_1-compleciones compactas

Teorema

El poset $\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \rangle$ es un retículo completo.

Demostración.

La función

$$\begin{aligned} \Delta_1^{\mathrm{com}}(P) &\longrightarrow \mathbb{M}(P) \times \mathbb{J}(P) \\ L &\longmapsto (\mathrm{K}(L), \mathrm{O}(L)) \end{aligned}$$

es una biyección. Además, como

$$\begin{aligned} L_1 \preceq L_2 &\iff \mathrm{K}(L_1) \preceq_0 \mathrm{K}(L_2) \text{ y } \mathrm{O}(L_1) \preceq_0 \mathrm{O}(L_2) \\ &\iff (\mathrm{K}(L_1), \mathrm{O}(L_1)) \preceq (\mathrm{K}(L_2), \mathrm{O}(L_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \right\rangle \cong \langle \mathbb{M}(P), \preceq_0 \rangle \times \langle \mathbb{J}(P), \preceq_0 \rangle \qquad \square$$

Δ_1-compleciones compactas

Teorema

El poset $\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \rangle$ es un retículo completo.

Demostración.

La función

$$\begin{aligned} \Delta_1^{\mathrm{com}}(P) &\longrightarrow \mathbb{M}(P) \times \mathbb{J}(P) \\ L &\longmapsto (\mathrm{K}(L), \mathrm{O}(L)) \end{aligned}$$

es una biyección. Además, como

$$\begin{aligned} L_1 \preceq L_2 &\iff \mathrm{K}(L_1) \preceq_0 \mathrm{K}(L_2) \text{ y } \mathrm{O}(L_1) \preceq_0 \mathrm{O}(L_2) \\ &\iff (\mathrm{K}(L_1), \mathrm{O}(L_1)) \preceq (\mathrm{K}(L_2), \mathrm{O}(L_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \right\rangle \cong \langle \mathbb{M}(P), \preceq_0 \rangle \times \langle \mathbb{J}(P), \preceq_0 \rangle \qquad \square$$

Δ_1-compleciones compactas

Teorema

El poset $\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \rangle$ es un retículo completo.

Demostración.

La función

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1^{\mathrm{com}}(P) & \longrightarrow & \mathbb{M}(P) \times \mathbb{J}(P) \\ L & \longmapsto & (\mathrm{K}(L), \mathrm{O}(L)) \end{array}$$

es una biyección. Además, como

$$\begin{aligned} L_1 \preceq L_2 &\iff \mathrm{K}(L_1) \preceq_0 \mathrm{K}(L_2) \ \text{ y } \ \mathrm{O}(L_1) \preceq_0 \mathrm{O}(L_2) \\ &\iff (\mathrm{K}(L_1), \mathrm{O}(L_1)) \preceq (\mathrm{K}(L_2), \mathrm{O}(L_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \right\rangle \cong \langle \mathbb{M}(P), \preceq_0 \rangle \times \langle \mathbb{J}(P), \preceq_0 \rangle \qquad \square$$

Δ_1-compleciones compactas

Teorema

El poset $\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \rangle$ es un retículo completo.

Demostración.

La función

$$\begin{aligned} \Delta_1^{\mathrm{com}}(P) &\longrightarrow \mathbb{M}(P) \times \mathbb{J}(P) \\ L &\longmapsto (\mathrm{K}(L), \mathrm{O}(L)) \end{aligned}$$

es una biyección. Además, como

$$\begin{aligned} L_1 \preceq L_2 &\iff \mathrm{K}(L_1) \preceq_0 \mathrm{K}(L_2) \ \text{ y } \ \mathrm{O}(L_1) \preceq_0 \mathrm{O}(L_2) \\ &\iff (\mathrm{K}(L_1), \mathrm{O}(L_1)) \preceq (\mathrm{K}(L_2), \mathrm{O}(L_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\langle \Delta_1^{\mathrm{com}}(P), \preceq \right\rangle \cong \langle \mathbb{M}(P), \preceq_0 \rangle \times \langle \mathbb{J}(P), \preceq_0 \rangle \qquad \square$$

Δ_1-compleciones compactas

Corolario

El último elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es la Δ_1-compleción $\langle \mathcal{U}(\mathcal{U}(P)), e^* \rangle$ con $e^*(a) = \{F \in \mathcal{U}(P) : a \in F\}$.

El primer elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es la Δ_1-compleción que corresponde al par $\langle \mathcal{N}(P), \mathcal{N}(P) \rangle$. ¿se puede obtener una mejor descripción de ésta?

Proposición

$\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es un subconjunto decreciente de $\Delta_1(P)$. Esto es,

$$L \in \Delta_1(P) \text{ y } C \in \Delta_1^{\text{com}}(P) \text{ tal que } L \leq C \implies L \in \Delta_1^{\text{com}}(P).$$

Δ_1-compleciones compactas

Corolario

El último elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es la Δ_1-compleción $\langle \mathcal{U}(\mathcal{U}(P)), e^* \rangle$ con $e^*(a) = \{F \in \mathcal{U}(P) : a \in F\}$.

El primer elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es la Δ_1-compleción que corresponde al par $\langle \mathcal{N}(P), \mathcal{N}(P) \rangle$. ¿se puede obtener una mejor descripción de ésta?

Proposición

$\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es un subconjunto decreciente de $\Delta_1(P)$. Esto es,

$$L \in \Delta_1(P) \text{ y } C \in \Delta_1^{\text{com}}(P) \text{ tal que } L \leq C \implies L \in \Delta_1^{\text{com}}(P).$$

Δ_1-compleciones compactas

Corolario

El último elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es la Δ_1-compleción $\langle \mathcal{U}(\mathcal{U}(P)), e^* \rangle$ con $e^*(a) = \{F \in \mathcal{U}(P) : a \in F\}$.

El primer elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es la Δ_1-compleción que corresponde al par $\langle \mathcal{N}(P), \mathcal{N}(P) \rangle$. ¿se puede obtener una mejor descripción de ésta?

Proposición

$\Delta_1^{\text{com}}(P)$ es un subconjunto decreciente de $\Delta_1(P)$. Esto es,

$$L \in \Delta_1(P) \text{ y } C \in \Delta_1^{\text{com}}(P) \text{ tal que } L \leq C \implies L \in \Delta_1^{\text{com}}(P).$$

Para seguir pensando...

Sea P un poset. Recordemos que

$$L^* = \mathcal{U}(\mathcal{U}(P))$$

es el último elemento de $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$. Sea $\langle L, e\rangle \in \Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$. Se define la función $\beta\colon L^* \to L$ por

$$\beta(U) = \bigvee \left\{ \bigwedge e[F] : F \in U \right\}.$$

Para seguir pensando...

Sea P un poset. Recordemos que

$$L^* = \mathcal{U}(\mathcal{U}(P))$$

es el último elemento de $\Delta_1^{\text{com}}(P)$. Sea $\langle L, e\rangle \in \Delta_1^{\text{com}}(P)$. Se define la función $\beta\colon L^* \to L$ por

$$\beta(U) = \bigvee \left\{ \bigwedge e[F] : F \in U \right\}.$$

Proposición

La función β cumple las siguientes propiedades:

1. β es sobreyectiva.
2. β preserva supremos arbitrarios.
3. $\beta(x^*) \in \mathrm{K}(L)$, $\forall x^* \in \mathrm{K}(L^*)$.
4. $\beta(y^*) \in \mathrm{O}(L)$, $\forall y^* \in \mathrm{O}(L^*)$.

Para seguir pensando...

Sea P un poset. Recordemos que

$$L^* = \mathcal{U}(\mathcal{U}(P))$$

es el último elemento de $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$. Sea $\langle L, e\rangle \in \Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$. Se define la función $\beta\colon L^* \to L$ por

$$\beta(U) = \bigvee \left\{ \bigwedge e[F] : F \in U \right\}.$$

Proposición

$L \in \Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$ es completamente distributiva si y sólo si $\beta\colon L^* \to L$ preserva ínfimos arbitrarios.

Para seguir pensando...

Sea P un poset. Recordemos que

$$L^* = \mathcal{U}\,(\mathcal{U}(P))$$

es el último elemento de $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$. Sea $\langle L, e\rangle \in \Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$. Se define la función $\beta\colon L^* \to L$ por

$$\beta(U) = \bigvee \left\{ \bigwedge e[F] : F \in U \right\}.$$

Proposición

$L \in \Delta_1^{\mathrm{com}}(P)$ es completamente distributiva si y sólo si $\beta\colon L^* \to L$ preserva ínfimos arbitrarios.

Demostración.

To be continued... □

Un resultado análogo para compleciones superiores es probado en *Standard completions for quasiordered sets* de Erné and Wilke.

Para seguir pensando...

Consideremos el siguiente conjunto de Δ_1-compleciones:

$$\begin{aligned}\Sigma(P) = \{L \in \Delta_1(P) :\ & L \text{ es una } \langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle - \text{compleción de } P \text{ tal que} \\ & \mathcal{F} \text{ es una colección estandar de conjuntos crecientes e} \\ & \mathcal{I} \text{ es una colección estandar de conjuntos decrecientes de } P\}\end{aligned}$$

Definición

$\langle L, e \rangle$ es una $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$-compleción de P si:

1. $F \in \mathcal{F}, I \in \mathcal{I}, \bigwedge e[F] \leq \bigvee e[I] \implies F \cap I \neq \emptyset$.
2. $\forall u \in L$

$$u = \bigvee \{\bigwedge e[F] : \bigwedge e[F] \leq u\} \quad \text{y} \quad u = \bigwedge \{\bigvee e[I] : u \leq \bigvee e[I]\}$$

Tenemos que $\Delta_1^{\text{com}}(P) \subseteq \Sigma(P)$. ¿$\langle \Sigma(P), \leq \rangle$ un retículo completo?

Para seguir pensando...

Consideremos el siguiente conjunto de Δ_1-compleciones:

$$\Sigma(P) = \{L \in \Delta_1(P) : \ L \ \text{ es una } \ \langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle - \text{compleción de } P \text{ tal que}$$
$$\mathcal{F} \ \text{ es una colección estandar de conjuntos crecientes e}$$
$$\mathcal{I} \ \text{ es una colección estandar de conjuntos decrecientes de } P\}$$

Definición

$\langle L, e \rangle$ es una $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$-compleción de P si:

1. $F \in \mathcal{F}, I \in \mathcal{I}, \bigwedge e[F] \leq \bigvee e[I] \implies F \cap I \neq \emptyset.$
2. $\forall u \in L$

$$u = \bigvee \{\bigwedge e[F] : \bigwedge e[F] \leq u\} \quad \text{y} \quad u = \bigwedge \{\bigvee e[I] : u \leq \bigvee e[I]\}$$

Tenemos que $\Delta_1^{com}(P) \subseteq \Sigma(P)$. ¿$\langle \Sigma(P), \leq \rangle$ un retículo completo?

Para seguir pensando...

Consideremos el siguiente conjunto de Δ_1-compleciones:

$$\Sigma(P) = \{L \in \Delta_1(P) : \ L \text{ es una } \langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle - \text{compleción de } P \text{ tal que}$$
$$\mathcal{F} \text{ es una colección estandar de conjuntos crecientes e}$$
$$\mathcal{I} \text{ es una colección estandar de conjuntos decrecientes de } P\}$$

Definición

$\langle L, e \rangle$ es una $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I} \rangle$-compleción de P si:

1. $F \in \mathcal{F}, I \in \mathcal{I}, \bigwedge e[F] \leq \bigvee e[I] \implies F \cap I \neq \emptyset$.
2. $\forall u \in L$

$$u = \bigvee \{\bigwedge e[F] : \bigwedge e[F] \leq u\} \quad \text{y} \quad u = \bigwedge \{\bigvee e[I] : u \leq \bigvee e[I]\}$$

Tenemos que $\Delta_1^{\text{com}}(P) \subseteq \Sigma(P)$. ¿$\langle \Sigma(P), \leq \rangle$ un retículo completo?

Para seguir pensando...

Consideremos el siguiente conjunto de Δ_1-compleciones:

$$\begin{aligned}\Sigma(P) = \{L \in \Delta_1(P) :\ L \ \text{es una}\ \langle \mathcal{F}, \mathcal{I}\rangle - \text{compleción de } P \text{ tal que}\\ \mathcal{F} \ \text{es una colección estandar de conjuntos crecientes e}\\ \mathcal{I} \ \text{es una colección estandar de conjuntos decrecientes de } P\}\end{aligned}$$

Definición

$\langle L, e\rangle$ es una $\langle \mathcal{F}, \mathcal{I}\rangle$-compleción de P si:

1. $F \in \mathcal{F}, I \in \mathcal{I}, \bigwedge e[F] \leq \bigvee e[I] \implies F \cap I \neq \emptyset$.
2. $\forall u \in L$

$$u = \bigvee \{\bigwedge e[F] : \bigwedge e[F] \leq u\} \quad \text{y} \quad u = \bigwedge \{\bigvee e[I] : u \leq \bigvee e[I]\}$$

Tenemos que $\Delta_1^{\mathrm{com}}(P) \subseteq \Sigma(P)$. ¿$\langle \Sigma(P), \leq\rangle$ un retículo completo?

¡Muchas Gracias!

Referencias

[1] M. Erné and G. Wilke.
Standard completions for quasiordered sets.
Semigroup Forum, 27:351–376, 1983.

[2] M. Gehrke, R. Jansana, and A. Palmigiano.
Δ_1-completions of a poset.
Order, 30(1):39–64, 2013.

[3] J. Schmidt.
Universal and internal properties of some extensions of partially ordered sets.
J. Reine und Angew. Math., 253:28–42, 1972.