XV Congreso Dr. Antonio Monteiro

El reticulado de subvariedades de $\mathcal{MG}$

P. Díaz Varela - N. Lubomirsky

UNLP - INMABB - CONICET

Definición

Una **t-norma** *es una operación binaria* $*: [0,1]^2 \to [0,1]$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $*$ *es conmutativa y asociativa.*
2. $*$ *es no decreciente en ambos argumentos, es decir, para todo* $x, y, z \in [0,1]$

$$x \leq y \text{ implica } x * z \leq y * z \text{ y } z * x \leq z * y,$$

3. $1 * x = x$ *y* $0 * x = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Una **t-norma continua** *es una t-norma que es continua como aplicación de* $[0,1]^2$ *en* $[0,1]$. *Para toda t-norma continua se puede definir un residuo que satisface:*

$$x * z \leq y \quad \text{si y solamente si} \quad x \leq z \to y.$$

Definición

Una **t-norma** *es una operación binaria* $*:[0,1]^2 \to [0,1]$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $*$ *es conmutativa y asociativa.*
2. $*$ *es no decreciente en ambos argumentos, es decir, para todo* $x, y, z \in [0,1]$

$$x \leq y \text{ implica } x * z \leq y * z \text{ y } z * x \leq z * y,$$

3. $1 * x = x$ *y* $0 * x = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Una **t-norma continua** *es una t-norma que es continua como aplicación de* $[0,1]^2$ *en* $[0,1]$. *Para toda t-norma continua se puede definir un residuo que satisface:*

$$x * z \leq y \ \text{ si y solamente si } \ x \leq z \to y.$$

El álgebra $([0,1], *, \to, max, min, 0, 1)$ es al álgebra estándar asociada a la t-norma continua $*$.

Ejemplos

1. *t-norma de Łukasiewicz:* $x *_L y = max(0, x + y - 1)$
   Implicación de Łukasiewicz: $x \rightarrow_L y = min(1, 1 - x + y)$,
2. *t-norma de Gödel :* $x *_G y = min(x, y)$,
   Implicación de Gödel :

$$x \rightarrow_G y = \begin{cases} y & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

3. *t-norma producto:* $x *_P y = x \cdot y$,
   Implicación de Goguen:

$$x \rightarrow_P y = \begin{cases} y/x & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

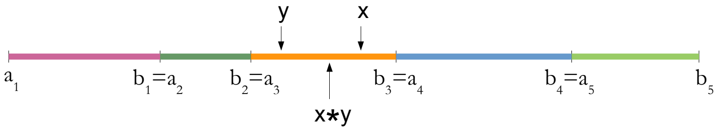
Ejemplos

1. *t-norma de Łukasiewicz:* $x *_L y = max(0, x + y - 1)$
   Implicación de Łukasiewicz: $x \rightarrow_L y = min(1, 1 - x + y)$,
2. *t-norma de Gödel :* $x *_G y = min(x, y)$,
   Implicación de Gödel :
   $$x \rightarrow_G y = \begin{cases} y & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$
3. *t-norma producto:* $x *_P y = x \cdot y$,
   Implicación de Goguen:
   $$x \rightarrow_P y = \begin{cases} y/x & si \quad x > y; \\ 1 & si \quad x \leq y. \end{cases}$$

Las álgebras $([0,1], *_L, \rightarrow_L, max, min, 0, 1)$, $([0,1], *_G, \rightarrow_G, max, min, 0, 1)$ y $([0,1], *_P, \rightarrow_P, max, min, 0, 1)$ son las álgebras estándar de Łukasiewicz, Gödel y Producto, respectivamente.

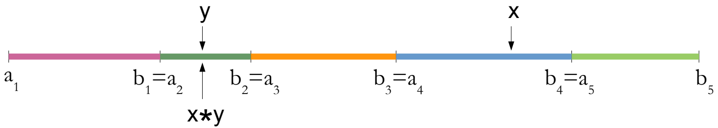
Si $(a_i, b_i)_{i\in I}$ es una familia de intervalos disjuntos, con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ y tales que $*^i$ es una t-norma continua sobre (a_i, b_i), definimos para todo par $x, y \in [0, 1]$ una t-norma continua llamada **suma ordinal de las t-normas**:

$$x * y = \begin{cases} x *^i_{[a_i,b_i]} y & \text{si } x, y \in (a_i, b_i); \\ min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Si $(a_i, b_i)_{i\in I}$ es una familia de intervalos disjuntos, con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ y tales que $*^i$ es una t-norma continua sobre (a_i, b_i), definimos para todo par $x, y \in [0,1]$ una t-norma continua llamada **suma ordinal de las t-normas**:

$$x * y = \begin{cases} x *^i_{[a_i, b_i]} y & \text{si } x, y \in (a_i, b_i); \\ min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



Si $(a_i, b_i)_{i\in I}$ es una familia de intervalos disjuntos, con $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ y tales que $*^i$ es una t-norma continua sobre (a_i, b_i), definimos para todo par $x, y \in [0,1]$ una t-norma continua llamada **suma ordinal de las t-normas**:

$$x * y = \begin{cases} x *^i_{[a_i,b_i]} y & \text{si } x, y \in (a_i, b_i); \\ min\{x, y\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Teorema (Mostert-Schields)

Toda t-norma continua es la suma ordinal de una familia de t-normas de Łukasiewicz, Gödel y producto.

Hoops y BL-Álgebras

Definiciones

Un **hoop** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \rightarrow, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0)$, *tal que* $(A, *, \top)$ *es un monoide conmutativo tal que para todo* $x, y, z \in A$:

1. $x \rightarrow x = \top$,
2. $x * (x \rightarrow y) = y * (y \rightarrow x)$,
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x * y) \rightarrow z$.

Hoops y BL-Álgebras

Definiciones

Un **hoop** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \to, \top)$ *de tipo* $(2,2,0)$, *tal que* $(A, *, \top)$ *es un monoide conmutativo tal que para todo* $x, y, z \in A$:

1. $x \to x = \top$,
2. $x * (x \to y) = y * (y \to x)$,
3. $x \to (y \to z) = (x * y) \to z$.

Un **hoop básico** *es un hoop que satisface la ecuación*

$$(((x \to y) \to z) * ((y \to x) \to z)) \to z) = \top$$

Hoops y BL-Álgebras

Definiciones

Un **hoop** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \rightarrow, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0)$*, tal que* $(A, *, \top)$ *es un monoide conmutativo tal que para todo* $x, y, z \in A$*:*

1. $x \rightarrow x = \top$,
2. $x * (x \rightarrow y) = y * (y \rightarrow x)$,
3. $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x * y) \rightarrow z$.

Un **hoop básico** *es un hoop que satisface la ecuación*

$$(((x \rightarrow y) \rightarrow z) * ((y \rightarrow x) \rightarrow z)) \rightarrow z) = \top$$

Una **BL-álgebra** *es un hoop básico acotado, es decir, un álgebra* $\mathbf{A} = (A, *, \rightarrow, \bot, \top)$ *de tipo* $(2, 2, 0, 0)$ *tal que* $(A, *, \rightarrow, \top)$ *es un hoop básico y* $\bot$ *es el mínimo de* A*.*

Definición

La clase de BL-álgebras es la variedad generada por todas las álgebras con t-normas continuas.

Definición

La clase de BL-álgebras es la variedad generada por todas las álgebras con t-normas continuas.

BL-álgebras

MV-álgebras

$x *_L y = max(0, x + y - 1)$

Álgebras de Gödel

$x *_G y = min(x, y)$

Álgebras producto

$x *_P y = x \cdot y$

Sumas ordinales

Definición

Sean $\mathbf{A} = \langle A, \cdot_A, \rightarrow_A, \top\rangle$ *y* $\mathbf{B} = \langle B, \cdot_B, \rightarrow_B, \top\rangle$ *dos hoops tales que* $A \cap B = \{\top\}$. *Luego podemos definir la* **suma ordinal** *de* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *como el hoop* $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \langle A \cup B, \cdot, \rightarrow, \top, \rangle$, *donde las operaciones* $\cdot$ *y* $\rightarrow$ *están dadas por:*

$$x \cdot y = \begin{cases} x \cdot_A y & si \quad x, y \in A; \\ x \cdot_B y & si \quad x, y \in B; \\ x & si \quad x \in A \setminus \{\top\},\ y \in B; \\ y & si \quad y \in B \setminus \{\top\},\ x \in A. \end{cases}$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} x \rightarrow_A y & si \quad x, y \in A; \\ x \rightarrow_B y & si \quad x, y \in B; \\ \top & si \quad x \in A \setminus \{\top\},\ y \in B; \\ y & si \quad y \in A,\ x \in B. \end{cases}$$

Descomposición en elementos regulares y densos

Dada una BL-álgebra $\mathbf{A}$ podemos considerar los conjuntos

$$MV(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg\neg x = x\},$$

cuyos elementos llamaremos **elementos regulares** de $\mathbf{A}$ y

$$D(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg x = \bot\},$$

que se conocen como se conocen como **elementos densos** de $\mathbf{A}$.

Descomposición en elementos regulares y densos

Dada una BL-álgebra **A** podemos considerar los conjuntos

$$MV(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg\neg x = x\},$$

cuyos elementos llamaremos **elementos regulares** de **A** y

$$D(\mathbf{A}) = \{x \in A : \neg x = \bot\},$$

que se conocen como se conocen como **elementos densos** de **A**.

Teorema (Busaniche)

Para toda BL-cadena **A**, *tenemos que* $\mathbf{A} \cong \mathbf{MV(A)} \oplus \mathbf{D(A)}$.

La subvariedad $\mathcal{MG}$

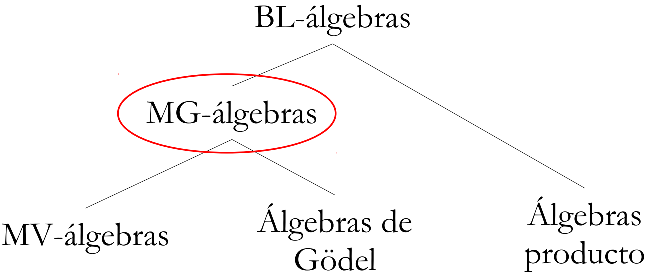
Nuestro objetivo es estudiar la subvariedad generada por la suma ordinal del álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$, es decir, generada por

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$

La subvariedad $\mathcal{MG}$

Nuestro objetivo es estudiar la subvariedad generada por la suma ordinal del álgebra $[0,1]_{\mathbf{MV}}$ y el hoop de Gödel $[0,1]_{\mathbf{G}}$, es decir, generada por

$$\mathfrak{A} = [0,1]_{\mathbf{MV}} \oplus [0,1]_{\mathbf{G}}.$$



T-NORMA Y VARIEDAD $\mathcal{MG}$

$$t(x,y) = \begin{cases} max(0, x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x, y \in [0, \frac{1}{2}); \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

t-norma y variedad $\mathcal{MG}$

$$t(x,y)=\begin{cases} max(0,x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x,y\in[0,\frac{1}{2});\\ min(x,y) & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Teorema

$\mathcal{MG}=\mathcal{MV}\oplus^t\mathcal{G}$.

Corolario

$\mathcal{MG}$ como subvariedad de $\mathcal{BL}$ está caracterizado por la ecuación

$$(\neg\neg x\to x)^2=(\neg\neg x\to x)$$

T-NORMA Y VARIEDAD $\mathcal{MG}$

$$t(x,y) = \begin{cases} max(0, x+y-\frac{1}{2}) & \text{si } x, y \in [0, \frac{1}{2}); \\ min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Teorema

$\mathcal{MG} = \mathcal{MV} \oplus^t \mathcal{G}$.

Corolario

$\mathcal{MG}$ como subvariedad de $\mathcal{BL}$ está caracterizado por la ecuación

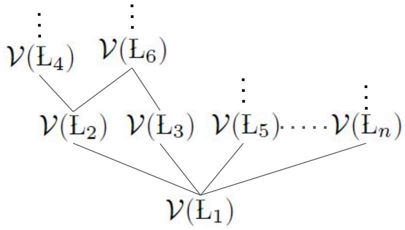
$$(\neg\neg x \to x)^2 = (\neg\neg x \to x)$$

¿Cuál es el reticulado de subvariedades de $\mathcal{MG}$?

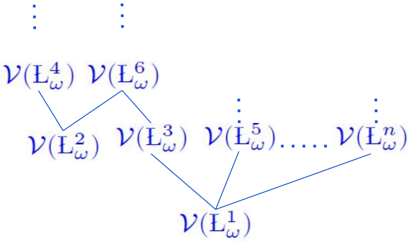
$$Ł_n = \Gamma(\mathbb{Z}, n)$$

$$Ł_\omega^n = \Gamma(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (n, 0))$$

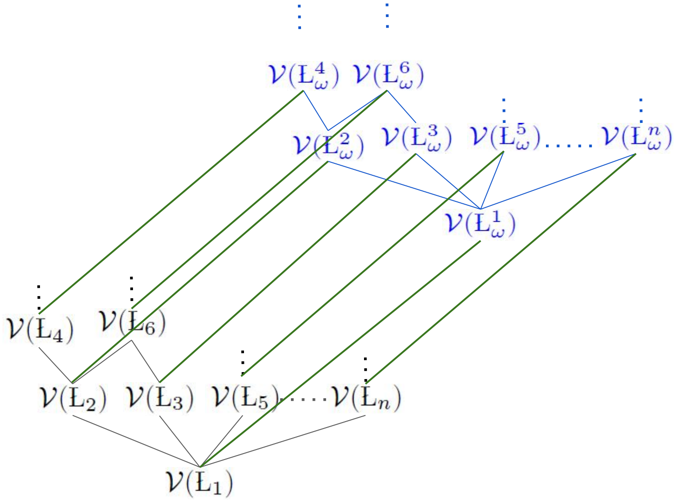
El reticulado de subvariedades $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MV})$



El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{MV})$



El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{MV})$



El reticulado de subvariedades $\Lambda(\mathcal{GA})$

$\mathcal{GA}$ tiene elementos idempotentes, por lo que tiene la EDPC (distributividad de congruencias) y el reticulado de subvariedades es una cadena numerable por lo que cualquier subvariedad propia es localmente finita.

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_n)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_5)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_4)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_3)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_2)$$

$$\mathcal{V}(\mathrm{GA}_1)$$

El reticulado de subvariedades $\boldsymbol{\Lambda}(\mathcal{G})$ (Agliano - Varieties III)

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\vdots \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_n) \arrow[d, dash, dotted] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_5) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_4) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_3) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_2) \arrow[d, dash] \\
\mathcal{V}(\mathrm{G}_1)
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Los elementos completamente supremo irreducibles de $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ son $\mathcal{V}(\mathbf{C})$ donde $\mathbf{C}$ es una cadena subdirecamente irreducible de $\mathcal{MG}$, es decir, son de alguna de las siguientes formas:

- $Ł_n$
- $Ł_\omega^n$
- $Ł_n \oplus G_n$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$

Teorema

Los elementos completamente supremo irreducibles de $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ *son* $\mathcal{V}(\mathbf{C})$ *donde* $\mathbf{C}$ *es una cadena subdirecamente irreducible de* $\mathcal{MG}$*, es decir, son de alguna de las siguientes formas:*

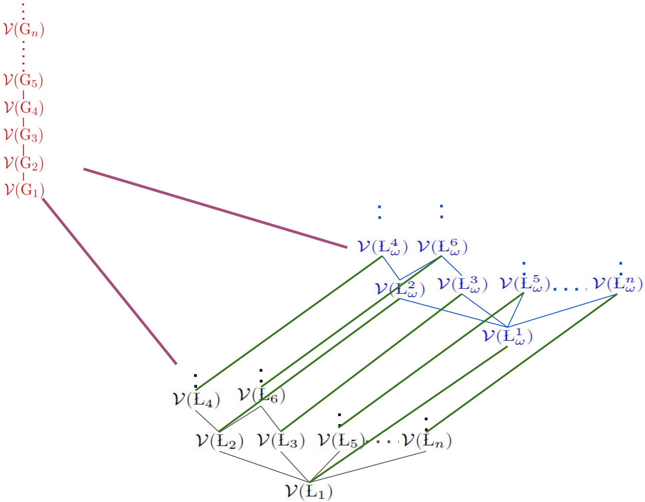
- $Ł_n$
- $Ł_\omega^n$
- $Ł_n \oplus G_n$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$

Corolario

Los elementos supremo irreducibles del reticulado de subvariedades de $\mathcal{MG}$ *forman un conjunto ordenado.*

$$(2 \times D(\mathbb{N})) \times (\omega + 1)$$

Supremo irreducibles en el reticulado de subvariedades de $\mathcal{MG}$



Teorema (Agliano-Montagna)

Si $\mathcal{A}$ es una variedad en $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ entonces $\mathcal{A}$ es supremo finito de variedades supremo irreducibles.

Bases ecuacionales

Lema (Di Nola - Lettieri)

Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(Ł_{\omega}^{n})$ de $\mathcal{MV}$ está caracterizada por la siguiente identidad:

$$(((n+1)x^n)^2 \leftrightarrow 2x^{n+1}) \wedge ((p.x^{p-1})^{n+1} \leftrightarrow (n+1)x^p) = 1 \quad (\alpha_{\omega}^{n})$$

para todo entero positivo $1 < p < n$ tal que p no es divisor de n.

Bases ecuacionales

Lema (Di Nola - Lettieri)

Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(Ł_\omega^n)$ de $\mathcal{MV}$ está caracterizada por la siguiente identidad:

$$(((n+1)x^n)^2 \leftrightarrow 2x^{n+1}) \wedge ((p.x^{p-1})^{n+1} \leftrightarrow (n+1)x^p) = 1 \quad (\alpha_\omega^n)$$

para todo entero positivo $1 < p < n$ tal que p no es divisor de n.

Lema (Di Nola - Lettieri)

Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(Ł_n)$ de $\mathcal{MV}$ está caracterizada por la siguiente identidad:

$$(((n+1)x^n)^2 \leftrightarrow 2x^{n+1}) \wedge ((p.x^{p-1})^{n+1} \leftrightarrow (n+1)x^p) \wedge ((n+1)x^q \leftrightarrow (n+2)x^q) = 1 \quad (\alpha_n)$$

para todo entero positivo $1 < p < n$ tal que p no es divisor de n y todo entero q tal que $1 < q < n$ y q divide a n.

Bases ecuacionales

Lema (Hecht - Kartiñak)

Para $n \geq 2$, la subvariedad $\mathcal{V}(G_n)$ de $\mathcal{G}$ está caracterizada por la siguiente identidad:

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} (x_i \leftrightarrow x_{i+1}) = 1 \; (\gamma_n)$$

Bases ecuacionales

Teorema

Las ecuaciones que caracterizan a las variedades completamente supremo irreducibles de $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ *son:*

- $Ł_n$: α_n
- $Ł_\omega^n$: α_ω^n
- $Ł_n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_n \to \alpha_n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_\omega^n \to \alpha_\omega^n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$

Bases ecuacionales

Teorema

Las ecuaciones que caracterizan a las variedades completamente supremo irreducibles de $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ son:

- $Ł_n$: α_n
- $Ł_\omega^n$: α_ω^n
- $Ł_n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_n \to \alpha_n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$
- $Ł_\omega^n \oplus G_n$: $(\neg\neg\alpha_\omega^n \to \alpha_\omega^n) \wedge (\neg\neg\gamma_n)$

Corolario

Si $\mathcal{A}$ es una variedad en $\mathbf{\Lambda}(\mathcal{MG})$ tal que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_k$ y $\beta_1, \ldots, \beta_k$ son las ecuaciones que caracterizan las variedades $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ como subvariedades de $\mathcal{MG}$ entonces $\mathcal{A}$ está caracterizada como subvariedad mediante la ecuación

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k = 1$$

Álgebras libres: Un ejemplo

$$\mathcal{V}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}(\text{Ł}^{1}_{\omega} \oplus G_2)$$

Álgebras libres: Un ejemplo

$$\mathcal{V}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}(Ł_{\omega}^{1} \oplus G_2)$$

$Free_{\mathcal{MV}}(1)$ o 1	$Free_{\mathcal{G}_2}(1)$
$Free_{\mathcal{MV}}(2)$	$Free_{\mathcal{MV}}(1)$ o 1

Álgebras libres: Un ejemplo

$$\mathcal{V}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}(\text{Ł}^1_\omega \oplus G_2)$$

$Free_{\mathcal{MV}}(1)$ o 1	$Free_{\mathcal{G}_2}(1)$
$Free_{\mathcal{MV}}(2)$	$Free_{\mathcal{MV}}(1)$ o 1

Sale del cociente de $Free_{\mathcal{MG}}(2)$ por el filtro

$$(\neg\neg x \leftrightarrow \neg\neg y) \vee (\neg\neg y \leftrightarrow \neg\neg x)$$

Aglianò, P., Ferreirim, I. M. A., Montagna, F., *Basic Hoops: an Algebraic Study of Continuous t-norms* Studia Logica, 2007 vol. 87, n. 1, pag. 73-98.

Aglianò, P., Montagna, F., *Varieties of BL-algebras I: general properties* Journal of Pure and Applied Algebra, 2003, vol. 181, n. 2-3, pag. 105-129.

Aglianò, P., Montagna, F., *Varieties of BL-Algebras II* Studia Logica, 2018, vol. 106, n. 4, pag. 721–737.

Aglianò, P., *Varieties of BL-Algebras III* Studia Logica, 2018.

Di Nola, A., Lettieri, A., *Equational Characterization of All Varieties of MV-Algebras* Journal of Algebra, 1999, vol. 221, n. 2, pag. 463 - 474.

Esteva, F., Godo, L., Montagna,F., *Equational characterization of the subverieties of BL generated by t-norm algebras* Studia Logica, 2004, vol. 76, n. 2, pag. 161-200.

Hecht, T., Kartiñak, T., *Equational classes of relative Stone algebras* Notre Dame J. Formal Logic 13 (1972), no. 2, 248–254.

Lubomirsky, N., *Técnicas geométricas y combinatorias en el estudio de subvariedades de BL-álgebras* Tesis Doctoral, Universidad Nacional de La Plata, 2017.