Álgebras de semi Nelson dualmente hemimórficas

Juan Manuel Cornejo - Hernán Javier San Martín
CONICET - UNS/UNLP

Construcción de Vakarelov (preliminares)

$\mathbb{H}$: álgebras de Heyting, $\mathbb{N}$: álgebras de Nelson

Construcción de Vakarelov (preliminares)

$\mathbb{H}$: álgebras de Heyting, $\mathbb{N}$: álgebras de Nelson

Sea $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \bot, \top) \in \mathbb{H}$, se define $\mathbf{V}_k(\mathbf{A})$ el álgebra:

- $K(A) = \{(a, b) \in A \times A : \; a \cap b = 0\}$
- $(a, b) \wedge (c, d) = (a \cap c, b \cup d)$,
- $(a, b) \vee (c, d) = (a \cup c, b \cap d)$,
- $(a, b) \to (c, d) = (a \Rightarrow c, a \cap d)$,
- $\sim (a, b) = (b, a)$,
- $1 = (\top, \bot)$,

Construcción de Vakarelov (preliminares)

$\mathbb{H}$: álgebras de Heyting, $\mathbb{N}$: álgebras de Nelson

Sea $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \perp, \top) \in \mathbb{H}$, se define $\mathbf{V}_k(\mathbf{A})$ el álgebra:

- $K(A) = \{(a, b) \in A \times A : \ a \cap b = 0\}$
- $(a, b) \wedge (c, d) = (a \cap c, b \cup d)$,
- $(a, b) \vee (c, d) = (a \cup c, b \cap d)$,
- $(a, b) \rightarrow (c, d) = (a \Rightarrow c, a \cap d)$,
- $\sim (a, b) = (b, a)$,
- $1 = (\top, \perp)$,

Entonces $\mathbf{V}_k(\mathbf{A}) \in \mathbb{N}$.

Álgebra cociente (preliminares)

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1) \in \mathbb{N}$, definimos:

$$x \equiv y \text{ if and only if } x \rightarrow y = 1 \text{ and } y \rightarrow x = 1$$

Álgebra cociente (preliminares)

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1) \in \mathbb{N}$, definimos:

$$x \equiv y \text{ if and only if } x \rightarrow y = 1 \text{ and } y \rightarrow x = 1$$

Consideramos $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = (A/_{\equiv}, \cap, \cup, \Rightarrow, \bot, \top)$ donde

- $\bot = [\![\sim 1]\!]$,
- $\top = [\![1]\!]$,
- $[\![x]\!] \cap [\![y]\!] = [\![x \wedge y]\!]$,
- $[\![x]\!] \cup [\![y]\!] = [\![x \vee y]\!]$,
- $[\![x]\!] \Rightarrow [\![y]\!] = [\![x \rightarrow y]\!]$.

Álgebra cociente (preliminares)

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1) \in \mathbb{N}$, definimos:

$$x \equiv y \text{ if and only if } x \rightarrow y = 1 \text{ and } y \rightarrow x = 1$$

Consideramos $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = (A/_{\equiv}, \cap, \cup, \Rightarrow, \bot, \top)$ donde

- $\bot = [\![\sim 1]\!]$,
- $\top = [\![1]\!]$,
- $[\![x]\!] \cap [\![y]\!] = [\![x \wedge y]\!]$,
- $[\![x]\!] \cup [\![y]\!] = [\![x \vee y]\!]$,
- $[\![x]\!] \Rightarrow [\![y]\!] = [\![x \rightarrow y]\!]$.

Luego $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) \in \mathbb{H}$.

Relación entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{N}$ (preliminares)

$$\mathbb{H} \quad \underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} \quad \mathbb{N}$$

Relación entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{N}$ (preliminares)

$$\mathbb{H} \quad \underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} \quad \mathbb{N}$$

Además,

- Si $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \perp, \top) \in \mathbb{H}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$.

Relación entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{N}$ (preliminares)

$$\mathbb{H} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{V}_k} \\ \xleftarrow{\mathbf{Q}} \end{array} \quad \mathbb{N}$$

Además,

- Si $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \perp, \top) \in \mathbb{H}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$.
- Si $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1) \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{V}_k(\mathbf{Q}(\mathbf{A}))$.

Relación entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{N}$ (preliminares)

$$\mathbb{H} \quad \underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} \quad \mathbb{N}$$

Además,

- Si $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \perp, \top) \in \mathbb{H}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$.
- Si $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1) \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{V}_k(\mathbf{Q}(\mathbf{A}))$.

Podemos citar por ejemplo:

[5] D. Vakarelov. *Notes on $\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation*. Studia Logica, 36(1–2):109–125, 1977.

Algebras de semi Heyting

Las álgebras de semi Heyting son álgebras $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \top, \bot \rangle$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\langle A, \vee, \wedge, \top, \bot \rangle$ *es un reticulado acotado.*
2. $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$
3. $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$
4. $x \rightarrow x \approx 1.$

[3] HANAMANTAGOUDA P. SANKAPPANAVAR. *Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras*. In *Proceedings of the 9th "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress (Spanish)*, Actas Congr. "Dr. Antonio A. R. Monteiro", pages 33–66, Bahía Blanca, 2008. Univ. Nac. del Sur.

Algebras de semi - Heyting

Las álgebras de Heyting son álgebras $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \rightarrow, \top, \bot \rangle$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\langle A, \vee, \wedge, \top, \bot \rangle$ *es un reticulado acotado.*
2. $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge y$
3. $x \wedge (y \rightarrow z) \approx x \wedge [(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z)]$
4. $(x \wedge y) \rightarrow x \approx 1.$

Algebras de semi - Heyting

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, shift left, "\mathbf{V}_k"] & \mathbb{N} \arrow[l, shift left, "\mathbf{Q}"] \\
\cap & \\
\mathbb{SH} &
\end{tikzcd}
$$

Algebras de semi - Heyting

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, shift left, "\mathbf{V}_k"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{N} \arrow[l, shift left, "\mathbf{Q}"] \\
\mathbb{SH} \arrow[r, shift left, "\mathbf{V}_k"] & ??? \arrow[l, shift left, "\mathbf{Q}"]
\end{tikzcd}$$

Algebras de semi Nelson

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, shift left, "\mathbf{V}_k"] & \mathbb{N} \arrow[l, shift left, "\mathbf{Q}"] \\
\mathbb{SH} \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{V}_k"] & \mathbb{SN} \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[l, shift left, "\mathbf{Q}"]
\end{tikzcd} \quad \checkmark$$

$\mathbb{SN}$: álgebras de semi Nelson

Algebras de semi Nelson

[2] Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, \sim, 1)$ es un álgebra de semi Nelson si verifica las siguientes ecuaciones:

(E1) $x \wedge (x \vee y) = x$,

(E2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$,

(E3) $\sim\sim x = x$,

(E4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,

(E5) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$,

(E6) $x \wedge (x \to_N y) = x \wedge (\sim x \vee y)$,

(E7) $x \to_N (y \to_N z) = (x \wedge y) \to_N z$,

(E8) $(x \to_N y) \to_N [(y \to_N x) \to_N [(x \to z) \to_N (y \to z)]] = 1$,

(E9) $(x \to_N y) \to_N [(y \to_N x) \to_N [(z \to x) \to_N (z \to y)]] = 1$,

(E10) $(\sim (x \to y)) \to_N (x \wedge \sim y) = 1$,

(E11) $(x \wedge \sim y) \to_N (\sim (x \to y)) = 1$.

donde $x \to_N y := x \to (x \wedge y)$.

Álgebras de semi Heyting dualmente hemimórficas

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, ', 0, 1)$ se dice que es un álgebra de semi Heyting dualmente hemimórfica si $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ es un álgebra de semi Heyting y se satisfacen las siguientes condiciones:

$(E4)$: $0' = 1$,

$(E5)$: $1' = 0$,

$(E6)$: $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

[4] Hanamantagouda P. Sankappanavar. *Expansions of semi-Heyting algebras I: Discriminator varieties*. Studia Logica, 98(1-2):27–81, 2011.

Álgebras de semi Heyting dualmente hemimórficas

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, ', 0, 1)$ se dice que es un álgebra de semi Heyting dualmente hemimórfica si $(A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ es un álgebra de semi Heyting y se satisfacen las siguientes condiciones:

$(E4)$: $0' = 1$,

$(E5)$: $1' = 0$,

$(E6)$: $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

[4] Hanamantagouda P. Sankappanavar. *Expansions of semi-Heyting algebras I: Discriminator varieties*. Studia Logica, 98(1-2):27–81, 2011.

$\mathbb{DHMSH}$: Álgebras de semi Heyting dualmente hemimórficas.

Álgebras de semi Heyting dualmente hemimórficas

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \underset{\longleftarrow}{\overset{\mathbf{V}_k}{\longrightarrow}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\overset{}{\underset{}{\mathbf{Q}}} & \mathbb{N} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{SH} & \underset{\longleftarrow}{\overset{\mathbf{V}_k}{\longrightarrow}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\overset{}{\underset{}{\mathbf{Q}}} & \mathbb{SN} \\
\sqcap & & \\
\mathbb{DHMSH} & &
\end{array}
$$

Álgebras de semi Heyting dualmente hemimórficas

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \underset{\xleftarrow{\mathbf{Q}}}{\xrightarrow{\mathbf{V}_k}} & \mathbb{N} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{SH} & \underset{\xleftarrow{\mathbf{Q}}}{\xrightarrow{\mathbf{V}_k}} & \mathbb{SN} \\
\sqcap & & \\
\mathbb{DHMSH} & \underset{\xleftarrow{\mathbf{Q}}}{\xrightarrow{\mathbf{V}_k}} & ???
\end{array}$$

Álgebras de semi Heyting dualmente hemimórficas

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} & \mathbb{N} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{SH} & \underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} & \mathbb{SN} \\
\sqcap & & \\
\mathbb{DHMSH} & \underset{\mathbf{Q}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} & \text{??? Lenguaje?}
\end{array}$$

Álgebras de semi Nelson dualmente hemimórficas

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \to, \sim, ', 1)$ es un álgebra de semi Nelson dualmente hemimórfica si $(A, \wedge, \vee, \to, \sim, 1)$ es un álgebra de semi Nelson y satisface las siguientes ecuaciones:

(E1) $(\sim 1)' = 1$

(E2) $1' \to (\sim 1) = 1$

(E3) $((x \to y) \wedge (y \to x) \wedge x)' \to ((x \to y) \wedge (y \to x) \wedge y)' = 1$

(E4) $(\sim x') \to (\sim x \wedge (x' \to x)) = 1$

(E5) $(\sim x \wedge (x' \to x)) \to (\sim x') = 1$

(E6) $(x \wedge y)' \to (x' \vee y') = 1$

(E7) $(x' \vee y') \to (x \wedge y)' = 1$

Álgebras de semi Nelson dualmente hemimórficas

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, ', 1)$ es un álgebra de semi Nelson dualmente hemimórfica si $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1)$ es un álgebra de semi Nelson y satisface las siguientes ecuaciones:

(E1) $(\sim 1)' = 1$

(E2) $1' \rightarrow (\sim 1) = 1$

(E3) $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge x)' \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge y)' = 1$

(E4) $(\sim x') \rightarrow (\sim x \wedge (x' \rightarrow x)) = 1$

(E5) $(\sim x \wedge (x' \rightarrow x)) \rightarrow (\sim x') = 1$

(E6) $(x \wedge y)' \rightarrow (x' \vee y') = 1$

(E7) $(x' \vee y') \rightarrow (x \wedge y)' = 1$

$\mathbb{DHMSN}$: variedad de las álgebras de semi Nelson dualmente hemimórficas.

Álgebras de semi Nelson dualmente hemimórficas

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \underset{\mathbf{H}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} & \mathbb{N} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{SH} & \underset{\mathbf{H}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} & \mathbb{SN} \\
\sqcap & & \sqcap \\
\mathbb{DHMSH} & \underset{\mathbf{H}}{\overset{\mathbf{V}_k}{\rightleftarrows}} & \mathbb{DHMSN}
\end{array}
$$

Funcionan?

Construcción de Vakarelov

Sea $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, ^\dagger, \perp, \top) \in \mathbb{DHMSH}$, se define $\mathbf{V}_k(\mathbf{A})$ el álgebra:

- $K(A), \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1$ como antes
- $(a, b)' = (a^\dagger, b \cap (a^\dagger \Rightarrow a))$.

Construcción de Vakarelov

Sea $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, ^{\dagger}, \bot, \top) \in \mathbb{DHMSH}$, se define $\mathbf{V}_k(\mathbf{A})$ el álgebra:

- $K(A), \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1$ como antes
- $(a, b)' = (a^{\dagger}, b \cap (a^{\dagger} \Rightarrow a))$.

Entonces $\mathbf{V}_k(\mathbf{A}) \in \mathbb{DHMSN}$.

Álgebra cociente

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, ', \sim, 1) \in \mathbb{DHMSN}$, se define sobre A la siguiente relación:

$$x \equiv y \text{ if and only if } x \rightarrow y = 1 \text{ and } y \rightarrow x = 1$$

Álgebra cociente

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, ', \sim, 1) \in \mathbb{DHMSN}$, se define sobre A la siguiente relación:

$$x \equiv y \text{ if and only if } x \rightarrow y = 1 \text{ and } y \rightarrow x = 1$$

Podemos considerar el álgebra $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = (A/_{\equiv}, \cap, \cup, \Rightarrow, ^{\dagger}, \bot, \top)$ siendo

- $\bot, \top, \cap, \cup, \Rightarrow$ como antes
- $[\![x]\!]^{\dagger} = [\![x']\!]$

Álgebra cociente

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, ', \sim, 1) \in \mathbb{DHMSN}$, se define sobre A la siguiente relación:

$$x \equiv y \text{ if and only if } x \rightarrow y = 1 \text{ and } y \rightarrow x = 1$$

Podemos considerar el álgebra $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) = (A/_{\equiv}, \cap, \cup, \Rightarrow, ^{\dagger}, \bot, \top)$ siendo

- $\bot, \top, \cap, \cup, \Rightarrow$ como antes
- $[\![x]\!]^{\dagger} = [\![x']\!]$

Luego $\mathbf{Q}(\mathbf{A}) \in \mathbb{DHMSH}$.

Relación entre $\mathbb{DHMSH}$ y $\mathbb{DHMSN}$

- Si $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \perp, \top) \in \mathbb{DHMSH}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$.

Relación entre $\mathbb{DHMSH}$ y $\mathbb{DHMSN}$

- Si $\mathbf{A} = (A, \cap, \cup, \Rightarrow, \bot, \top) \in \mathbb{DHMSH}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$.
- Si $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1) \in \mathbb{DHMSN}$ entonces $\mathbf{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{V}_k(\mathbf{Q}(\mathbf{A}))$.

Álgebras de semi Nelson dualmente hemimórficas

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H} & \begin{array}{c}\xrightarrow{\mathbf{V}_k}\\ \xleftarrow{\mathbf{Q}}\end{array} & \mathbb{N} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{SH} & \begin{array}{c}\xrightarrow{\mathbf{V}_k}\\ \xleftarrow{\mathbf{Q}}\end{array} & \mathbb{SN} \\
\sqcap & & \sqcap \\
\mathbb{DHMSH} & \begin{array}{c}\xrightarrow{\mathbf{V}_k}\\ \xleftarrow{\mathbf{Q}}\end{array} & \mathbb{DHMSN}\,\checkmark
\end{array}$$

Álgebras de semi Nelson centradas dualmente hemimórficas

$\mathbb{SN}_c$: la categoría cuyos objetos son álgebras $(T, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, \mathrm{c}, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0)$, donde $(T, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1)$ es un álgebra de semi Nelson, $0 = \sim 1$ y c satisface que $c = \sim c$.

Álgebras de semi Nelson centradas dualmente hemimórficas

$\mathbb{SN}_c$: la categoría cuyos objetos son álgebras $(T, \wedge, \vee, \to, \sim, \mathrm{c}, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 1, 0, 0, 0)$, donde $(T, \wedge, \vee, \to, \sim, 1)$ es un álgebra de semi Nelson, $0 = \sim 1$ y c satisface que $c = \sim c$.

$\mathbb{DHMSN}c$: la categoría cuyos objetos son álgebras $(T, \wedge, \vee, \to, \sim, ', \mathrm{c}, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0)$ tal que $(T, \wedge, \vee, \to, \sim, \mathrm{c}, 0, 1) \in \mathbb{SN}_c$ y $(T, \wedge, \vee, \to, \sim, ', 1) \in \mathbb{DHMSN}$.

Álgebras de semi Nelson centradas dualmente hemimórficas

- Sea $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morfismo en $\mathbb{DHMSN}c$. Entonces $\mathbf{Q}(f) : \mathbf{Q}(\mathbf{A}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{B})$ definido como $(\mathbf{Q}(f))([\![a]\!]) = [\![f(a)]\!]$ es un morfismo en $\mathbb{DHMSH}$.
- Si $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un morfismo en $\mathbb{DHMSH}$ entonces $\mathbf{V}_k(f) : \mathbf{V}_k(\mathbf{A}) \to \mathbf{V}_k(\mathbf{B})$ definido como $(\mathbf{V}_k(f))(a, b) = (f(a), f(b))$ es un morfismo en $\mathbb{DHMSN}c$.
- Para $A \in \mathbb{SN}_c$ tenemos que $h : \mathbf{A} \to (\mathbf{V}_k(\mathbf{Q}(A)))$ definido por $h(a) = ([\![a]\!], [\![\sim a]\!])$ es un isomorfismo.
- Si $A \in \mathcal{SH}$, la aplicación $i : \mathbf{A} \to \mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$ dada por $i(a) = [\![(a, a^*)]\!]$ es un isomorfismo.

Álgebras de semi Nelson centradas dualmente hemimórficas

- Sea $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morfismo en $\mathbb{DHMSN}c$. Entonces $\mathbf{Q}(f) : \mathbf{Q}(\mathbf{A}) \to \mathbf{Q}(\mathbf{B})$ definido como $(\mathbf{Q}(f))([\![a]\!]) = [\![f(a)]\!]$ es un morfismo en $\mathbb{DHMSH}$.
- Si $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un morfismo en $\mathbb{DHMSH}$ entonces $\mathbf{V}_k(f) : \mathbf{V}_k(\mathbf{A}) \to \mathbf{V}_k(\mathbf{B})$ definido como $(\mathbf{V}_k(f))(a, b) = (f(a), f(b))$ es un morfismo en $\mathbb{DHMSN}c$.
- Para $A \in \mathbb{SN}_c$ tenemos que $h : \mathbf{A} \to (\mathbf{V}_k(\mathbf{Q}(A)))$ definido por $h(a) = ([\![a]\!], [\![\sim a]\!])$ es un isomorfismo.
- Si $A \in \mathcal{SH}$, la aplicación $i : \mathbf{A} \to \mathbf{Q}(\mathbf{V}_k(\mathbf{A}))$ dada por $i(a) = [\![(a, a^*)]\!]$ es un isomorfismo.

Teorema

Los funtores $\mathbf{Q} : \mathbb{DHMSN}c \to \mathbb{DHMSH}$ *y* $\mathbf{V}_k : \mathbb{DHMSH} \to \mathbb{DHMSN}c$ *establecen una equivalencia categorial entre* $\mathbb{DHMSN}c$ *y* $\mathbb{DHMSH}$ *con isomorfimos naturales* h *e* i.

Sistemas deductivos y congruencias en $\mathbb{DHMSN}$

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \sim, ', 1) \in \mathbb{DHMSN}$. Un subconjunto $D \subseteq A$ es un *sistema N-deductivo* de A si para todo $a, b \in A$, las siguientes condiciones se satisfacen:

*Ds*1) $1 \in D$,

*Ds*2) Si $a, a \to_N b \in D$ entonces $b \in D$.

siendo $x \to_N y := x \to (x \wedge y)$.

Sistemas deductivos y congruencias en $\mathbb{DHMSN}$

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, ', 1) \in \mathbb{DHMSN}$. Un subconjunto $D \subseteq A$ es un *sistema N-deductivo* de A si para todo $a, b \in A$, las siguientes condiciones se satisfacen:

*Ds*1) $1 \in D$,

*Ds*2) Si $a, a \rightarrow_N b \in D$ entonces $b \in D$.

siendo $x \rightarrow_N y := x \rightarrow (x \wedge y)$.
Diremos que D es un *sistema N'-deductivo* si satisface la siguiente condición adicional:

*Ds*3) Si $a \in D$ entonces $(a') \rightarrow_N (\sim 1) \in D$.

Sistemas deductivos y congruencias en $\mathbb{DHMSN}$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{DHMSN}$.
$\mathbf{Con}(\mathbf{A})$: el reticulado de congruencias del álgebra $\mathbf{A}$.
$\mathbf{Ded_N}(\mathbf{A})$: el reticulado de sistema $N^{'}$-deductivos del álgebra $\mathbf{A}$.

Sistemas deductivos y congruencias en $\mathbb{DHMSN}$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{DHMSN}$.
$\mathbf{Con}(\mathbf{A})$: el reticulado de congruencias del álgebra $\mathbf{A}$.
$\mathbf{Ded_N}(\mathbf{A})$: el reticulado de sistema N'-deductivos del álgebra $\mathbf{A}$.

Teorema

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \to, \sim, ', 1) \in \mathbb{DHMSN}$. *Entonces los reticulados* $\mathbf{Ded_N}(\mathbf{A})$ *y* $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ *son isomorfos.*

Sistemas deductivos y congruencias en $\mathbb{DHMSN}$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{DHMSN}$.
$\mathbf{Con}(\mathbf{A})$: el reticulado de congruencias del álgebra $\mathbf{A}$.
$\mathbf{Ded_N}(\mathbf{A})$: el reticulado de sistema $N^{'}$-deductivos del álgebra $\mathbf{A}$.

Teorema

Sea $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, ', 1) \in \mathbb{DHMSN}$. *Entonces los reticulados* $\mathbf{Ded_N}(\mathbf{A})$ *y* $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ *son isomorfos.*

Como consecuencia $\mathbb{DHMSN}$ es una variedad aritmética.

Referencias

[1] Juan M. Cornejo and Hanamantagouda P. Sankappanavar. *A logic for dually hemimorphic semi Heyting algebras*. 2016 (enviado).

[2] Juan M. Cornejo and Ignacio D. Viglizzo. *Semi-Nelson algebras*. Order, 2016.

[3] Hanamantagouda P. Sankappanavar. *Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras*. In *Proceedings of the 9th "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress (Spanish)*, Actas Congr. "Dr. Antonio A. R. Monteiro", pages 33–66, Bahía Blanca, 2008. Univ. Nac. del Sur.

[4] Hanamantagouda P. Sankappanavar. *Expansions of semi-Heyting algebras I: Discriminator varieties*. Studia Logica, 98(1-2):27–81, 2011.

[5] D. Vakarelov. *Notes on $\mathcal{N}$-lattices and constructive logic with strong negation*. Studia Logica, 36(1–2):109–125, 1977.

Muchas gracias por su atención.