Operadores cuasi-modales sobre DN-álgebras

Ismael Calomino – Sergio A. Celani – Luciano J. González

XV Congreso Dr. Antonio Monteiro – Bahía Blanca

5 – 7 de Junio de 2019

Introducción

Definition

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1 \rangle$ un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que $\mathbf{A}$ es una **N-álgebra** si para cada $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A \colon a \leq x\}$$

es un retículo acotado.

Introducción

Definition

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1\rangle$ un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que $\mathbf{A}$ es una **N-álgebra** si para cada $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A \colon a \leq x\}$$

es un retículo acotado.

- Cornish W.; Hickman R.: *Weakly distributive semilattices.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), 5–16.
- Hickman R.: *Join algebras.* Communications in Algebra **8** (1980), 1653–1685.
- Chajda I.; Halaš R.; Kühr J.: *Semilattices Structures.* Research and Exposition in Mathematics, Heldermann Verlag (2007).

Introducción

$$(a \vee c)$$

Introducción

$$(a \vee c) \ \ (b \vee c)$$

Introducción

$$(a \vee c) \wedge_c (b \vee c)$$

Introducción

$$m(a, b, c) = (a \vee c) \wedge_c (b \vee c)$$

Introducción

Sea **A** una N-álgebra. Entonces $\mathbf{A}_* = \langle A, m, 1\rangle$ satisface

1. $m(a, b, a) = a$,
2. $m(a, a, b) = m(b, b, a)$,
3. $m(m(a, a, b), m(a, a, b), c) = m(a, a, m(b, b, c))$,
4. $m(a, b, c) = m(b, a, c)$,
5. $m(m(a, b, c), d, c) = m(a, m(b, d, c), c)$,
6. $m(a, m(b, b, a), c) = m(a, a, c)$,
7. $m(a, a, m(a, b, c)) = m(a, a, c)$,
8. $m(m(a, a, c), m(b, b, c), c) = m(a, b, c)$,
9. $m(a, a, 1) = 1$.

Introducción

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra. Entonces $\mathbf{A}_* = \langle A, m, 1\rangle$ satisface

1. $m(a, b, a) = a$,
2. $m(a, a, b) = m(b, b, a)$,
3. $m(m(a, a, b), m(a, a, b), c) = m(a, a, m(b, b, c))$,
4. $m(a, b, c) = m(b, a, c)$,
5. $m(m(a, b, c), d, c) = m(a, m(b, d, c), c)$,
6. $m(a, m(b, b, a), c) = m(a, a, c)$,
7. $m(a, a, m(a, b, c)) = m(a, a, c)$,
8. $m(m(a, a, c), m(b, b, c), c) = m(a, b, c)$,
9. $m(a, a, 1) = 1$.

Sea $\mathbf{A} = \langle A, m, 1\rangle$ satisface $1 - 9$.

Introducción

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra. Entonces $\mathbf{A}_* = \langle A, m, 1\rangle$ satisface

1. $m(a, b, a) = a$,
2. $m(a, a, b) = m(b, b, a)$,
3. $m(m(a, a, b), m(a, a, b), c) = m(a, a, m(b, b, c))$,
4. $m(a, b, c) = m(b, a, c)$,
5. $m(m(a, b, c), d, c) = m(a, m(b, d, c), c)$,
6. $m(a, m(b, b, a), c) = m(a, a, c)$,
7. $m(a, a, m(a, b, c)) = m(a, a, c)$,
8. $m(m(a, a, c), m(b, b, c), c) = m(a, b, c)$,
9. $m(a, a, 1) = 1$.

Sea $\mathbf{A} = \langle A, m, 1\rangle$ satisface $1 - 9$. Si $a \vee b = m(a, a, b)$, entonces $\mathbf{A}^\bullet = \langle A, \vee, 1\rangle$ es una N-álgebra.

Introducción

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra. Entonces $\mathbf{A}_* = \langle A, m, 1\rangle$ satisface

1. $m(a, b, a) = a$,
2. $m(a, a, b) = m(b, b, a)$,
3. $m(m(a, a, b), m(a, a, b), c) = m(a, a, m(b, b, c))$,
4. $m(a, b, c) = m(b, a, c)$,
5. $m(m(a, b, c), d, c) = m(a, m(b, d, c), c)$,
6. $m(a, m(b, b, a), c) = m(a, a, c)$,
7. $m(a, a, m(a, b, c)) = m(a, a, c)$,
8. $m(m(a, a, c), m(b, b, c), c) = m(a, b, c)$,
9. $m(a, a, 1) = 1$.

Sea $\mathbf{A} = \langle A, m, 1\rangle$ satisface $1 - 9$. Si $a \vee b = m(a, a, b)$, entonces $\mathbf{A}^\bullet = \langle A, \vee, 1\rangle$ es una N-álgebra. Luego $(\mathbf{A}_*)^\bullet = \mathbf{A}$ y $(\mathbf{A}^\bullet)_* = \mathbf{A}$.

Introducción

Definición

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1 \rangle$ *un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es una* **DN-álgebra** *si para cada* $a \in A$,

$$[a) = \{x \in A \colon a \leq x\}$$

es un retículo **distributivo** *acotado.*

Introducción

Definición

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, 1 \rangle$ *un supremo-semirretículo con último elemento. Diremos que* $\mathbf{A}$ *es una* **DN-álgebra** *si para cada* $a \in A$*,*

$$[a) = \{x \in A \colon a \leq x\}$$

es un retículo **distributivo** *acotado.*

- Celani S.; Calomino I.: *Stone style duality for distributive nearlattices.* Algebra Univers. **71** (2014), 127–153.
- Celani S.; Calomino I.: *On homomorphic images and the free distributive lattices extension of a distributive nearlattices.* Reports Math. Logic **51** (2016), 57–73.
- González J. L.: *The logic of distributive nearlattices.* Soft Comput. **22** (2018), 2797–2807.

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra.

Introducción

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra.

Teorema

$\mathbf{A}$ es una DN-álgebra si y sólo si verifica alguna de las siguientes condiciones:

- $m(a, m(b, b, c), d) = m(m(a, b, d), m(a, b, d), m(a, c, d))$,
- $m(a, a, m(b, c, d)) = m(m(a, a, b), m(a, a, c), d)$.

Introducción

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra.

Teorema

$\mathbf{A}$ *es una DN-álgebra si y sólo si verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- $m(a, m(b, b, c), d) = m(m(a, b, d), m(a, b, d), m(a, c, d))$,
- $m(a, a, m(b, c, d)) = m(m(a, a, b), m(a, a, c), d)$.

Ejemplo

Retículos distributivos acotados.

Introducción

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra.

Teorema

$\mathbf{A}$ es una DN-álgebra si y sólo si verifica alguna de las siguientes condiciones:

- $m(a, m(b, b, c), d) = m(m(a, b, d), m(a, b, d), m(a, c, d))$,
- $m(a, a, m(b, c, d)) = m(m(a, a, b), m(a, a, c), d)$.

Ejemplo

Retículos distributivos acotados.

Ejemplo

Álgebras de Tarski.

Motivación

Sea **A** una N-álgebra:

Motivación

Sea **A** una N-álgebra:

- **A** distibutivo $\Longleftrightarrow \mathrm{Fi_f}(\mathbf{A})$ retículo distributivo acotado.

Motivación

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra:

- $\mathbf{A}$ distibutivo $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(\mathbf{A})$ retículo distributivo acotado.

Motivación:

Sea $\mathbf{A}$ una DN-álgebra:

Motivación

Sea **A** una N-álgebra:

- **A** distibutivo $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(\mathbf{A})$ retículo distributivo acotado.

Motivación:

Sea **A** una DN-álgebra:

- **???** $\Longleftrightarrow$ operadores modales $\mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(\mathbf{A})$.

Motivación

Sea $\mathbf{A}$ una N-álgebra:

- $\mathbf{A}$ distibutivo $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Fi_f}(\mathbf{A})$ retículo distributivo acotado.

Motivación:

Sea $\mathbf{A}$ una DN-álgebra:

- **Operadores cuasi-modales** $\Longleftrightarrow$ operadores modales $\mathrm{Fi_f}(\mathbf{A})$.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla : A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- *si existe* $a \wedge b$, *entonces* $\nabla(a \wedge b) = \nabla a \veebar \nabla b$.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla\colon A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla : A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(A)$, *para todo* $a \in A$.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla : A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi_f}(A)$, *para todo* $a \in A$.

Ejemplo

$\nabla : A \to \mathrm{Fi_f}(A)$ *dada por* $\nabla a = [a)$.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla \colon A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi_f}(A)$, *para todo* $a \in A$.

- Celani S.; Calomino I.: *Distributive nearlattices with a necessity modal operator.* Math. Slovaca **69** (2019), 35-52.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla \colon A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi_f}(A)$, *para todo* $a \in A$.

- Celani S.; Calomino I.: *Distributive nearlattices with a necessity modal operator.* Math. Slovaca **69** (2019), 35-52.

$\Box \colon A \to A$ tal que verifica las siguientes condiciones:

- $\Box 1 = 1$,
- si existe $a \wedge b$, entonces $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla : A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi_f}(A)$, *para todo* $a \in A$.

- Celani S.; Calomino I.: *Distributive nearlattices with a necessity modal operator.* Math. Slovaca **69** (2019), 35-52.

$\Box : A \to A$ tal que verifica las siguientes condiciones:

- $\Box 1 = 1$,
- $\Box m(a, b, c) = m\left(\Box(a \vee c), \Box(b \vee c), \Box c\right)$.

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla : A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(A)$, *para todo* $a \in A$.

- $\Box$ induce un operador cuasi-modal finito

$$\nabla_{\Box} a = [\Box a)$$

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea **A** *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla \colon A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi_f}(A)$, *para todo* $a \in A$.

- $\Box$ induce un operador cuasi-modal finito

$$\nabla_{\Box} a = [\Box a)$$

- ∇ un operador cuasi-modal finito tal que ∇a es principal,

Operadores cuasi-modales

Definición

Sea $\mathbf{A}$ *una DN-álgebra. Diremos que una aplicación* $\nabla : A \to \mathrm{Fi}(A)$ *es un* **operador cuasi-modal** *si verifica las siguientes condiciones:*

- $\nabla 1 = \{1\}$,
- $\nabla m(a, b, c) = \nabla(a \vee c) \veebar \nabla(b \vee c)$.

Diremos que ∇ *es* **finito** *si* $\nabla a \in \mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(A)$, *para todo* $a \in A$.

- $\Box$ induce un operador cuasi-modal finito

$$\nabla_{\Box} a = [\Box a)$$

- ∇ un operador cuasi-modal finito tal que ∇a es principal,

$$\Box_{\nabla} a = b \Longleftrightarrow \nabla a = [b)$$

Operadores cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ una DN-álgebra cuasi-modal. Para $X \subseteq A$, definimos

$$\gamma(X) = \{a \in A \colon \nabla a \cap X = \emptyset\}$$

Teorema

A *una DN-álgebra y* $\nabla \colon A \to \mathrm{Fi}(A)$ *una aplicación.*

- ∇ *es un operador cuasi-modal sobre* **A**,
- ∇ *invierte el orden y* $\gamma(P) \in \mathrm{Fi}(A)$, *para todo* $P \in \mathrm{X}(A)$.

Operadores cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ una DN-álgebra cuasi-modal. Para $X \subseteq A$, definimos

$$\gamma(X) = \{a \in A \colon \nabla a \cap X = \emptyset\}$$

Teorema

$\mathbf{A}$ una DN-álgebra y $\nabla \colon A \to \mathrm{Fi}(A)$ una aplicación.

- *∇ es un operador cuasi-modal sobre $\mathbf{A}$,*
- *∇ invierte el orden y $\gamma(P) \in \mathrm{Fi}(A)$, para todo $P \in \mathrm{X}(A)$.*

Definición

$\langle \mathbf{A}, \nabla_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{B}, \nabla_2 \rangle$ DN-álgebras cuasi-modales. Una aplicación $h \colon A \to B$ es un **qm-homomorfismo** *si:*

- *h es un homomorfismo,*
- $\mathrm{Fig}_B(h(\nabla_1 a)) = \nabla_2(h(a))$.

Operadores cuasi-modales finitos

Definición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ *una DN-álgebra cuasi-modal. Para* $X \subseteq A$ *definimos*

$$\Diamond_{\nabla}(X) = \mathrm{Fig}\left(\bigcup \{\nabla x \colon x \in X\}\right)$$

Operadores cuasi-modales finitos

Definición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ una DN-álgebra cuasi-modal. Para $X \subseteq A$ definimos

$$\Diamond_{\nabla}(X) = \mathrm{Fig}\left(\bigcup \{\nabla x \colon x \in X\}\right)$$

Lema

$\Diamond_{\nabla}([a)) = \nabla a$, para todo $a \in A$.

Operadores cuasi-modales finitos

Definición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ *una DN-álgebra cuasi-modal. Para* $X \subseteq A$ *definimos*

$$\Diamond_{\nabla}(X) = \mathrm{Fig}\left(\bigcup\{\nabla x \colon x \in X\}\right)$$

Lema

$\Diamond_{\nabla}([a)) = \nabla a$, *para todo* $a \in A$.

$\Diamond \colon L \to L$ tal que verifica las siguientes condiciones:

- $\Diamond 0 = 0$,
- $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.

Operadores cuasi-modales finitos

Proposición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ una DN-álgebra cuasi-modal finita. Entonces la aplicación $\lozenge_\nabla : \mathrm{Fi_f}(A) \to \mathrm{Fi_f}(A)$ verifica las siguientes condiciones:

- $\lozenge_\nabla([1)) = [1)$,
- $\lozenge_\nabla (F \veebar G) = \lozenge_\nabla(F) \veebar \lozenge_\nabla(G)$, *para todo* $F, G \in \mathrm{Fi_f}(A)$.

Operadores cuasi-modales finitos

Proposición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ una DN-álgebra cuasi-modal finita. Entonces la aplicación $\Diamond_\nabla : \mathrm{Fi_f}(A) \to \mathrm{Fi_f}(A)$ verifica las siguientes condiciones:

- $\Diamond_\nabla([1)) = [1)$,
- $\Diamond_\nabla (F \veebar G) = \Diamond_\nabla(F) \veebar \Diamond_\nabla(G)$, *para todo* $F, G \in \mathrm{Fi_f}(A)$.

Proposición

$\mathbf{A}$ *una DN-álgebra y* $\Diamond : \mathrm{Fi_f}(A) \to \mathrm{Fi_f}(A)$ *un operador modal posibilidad sobre* $\mathrm{Fi_f}(\mathbf{A})$. *Entonces* $\nabla_\Diamond : A \to \mathrm{Fi_f}(A)$ *dada por*

$$\nabla_\Diamond a = \Diamond([a))$$

es un operador cuasi-modal finito.

Operadores cuasi-modales finitos

Teorema

A *una DN-álgebra. Entonces:*

- ∇ *operador cuasi-modal finito sobre* **A***, entonces*

$$\nabla = \nabla_{\Diamond_\nabla}$$

- $\Diamond$ *operador modal posibilidad sobre* $\mathrm{Fi}_{\mathrm{f}}(\mathbf{A})$*, entonces*

$$\Diamond = \Diamond_{\nabla_\Diamond}$$

Congruencias cuasi-modales

Definición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ *y* $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. *Diremos que* θ *es* **cuasi-modal** *si para cada* $(a, b) \in \theta$ *se verifica la siguiente condición:*

$$\forall x \in \nabla a,\ \exists y \in \nabla b \colon (x, y) \in \theta$$

Congruencias cuasi-modales

Definición

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ *y* $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. *Diremos que* θ *es* **cuasi-modal** *si para cada* $(a, b) \in \theta$ *se verifica la siguiente condición:*

$$\forall x \in \nabla a,\ \exists y \in \nabla b \colon (x, y) \in \theta$$

Ejemplo

$\langle \mathbf{A}, \nabla_1 \rangle$, $\langle \mathbf{B}, \nabla_2 \rangle$ *y* $h \colon A \to B$ *un qm-homomorfismo, entonces*

$$\mathrm{Ker}\, h = \{(a, b) \in A^2 \colon h(a) = h(b)\}$$

es una congruencia cuasi-modal.

Congruencias cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$.

Congruencias cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$. Definimos $\langle \mathbf{A}/\theta, \nabla_\theta \rangle$, donde

$$\nabla_\theta [a]_\theta = \{[b]_\theta \colon b \in \nabla a\}.$$

Congruencias cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$. Definimos $\langle \mathbf{A}/\theta, \nabla_\theta \rangle$, donde

$$\nabla_\theta[a]_\theta = \{[b]_\theta \colon b \in \nabla a\}.$$

Sea $\pi_\theta \colon A \to A/\theta$ el homomorfismo canónico.

Congruencias cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$. Definimos $\langle \mathbf{A}/\theta, \nabla_\theta \rangle$, donde

$$\nabla_\theta [a]_\theta = \{[b]_\theta \colon b \in \nabla a\}.$$

Sea $\pi_\theta \colon A \to A/\theta$ el homomorfismo canónico.

Lema

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ *y* $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. *Son equivalentes:*

- $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$,
- $\mathrm{Fig}_{A/\theta}(\pi_\theta(\nabla a)) = \nabla_\theta(\pi_\theta(a))$, *para todo* $a \in A$.

Congruencias cuasi-modales

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$. Definimos $\langle \mathbf{A}/\theta, \nabla_\theta \rangle$, donde

$$\nabla_\theta [a]_\theta = \{[b]_\theta \colon b \in \nabla a\}.$$

Sea $\pi_\theta \colon A \to A/\theta$ el homomorfismo canónico.

Lema

$\langle \mathbf{A}, \nabla \rangle$ y $\theta \in \mathrm{Con}(A)$. Son equivalentes:

- $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathrm{qm}}(A)$,
- $\mathrm{Fig}_{A/\theta}(\pi_\theta(\nabla a)) = \nabla_\theta(\pi_\theta(a))$, *para todo $a \in A$.*

Teorema

$\langle \mathbf{A}, \nabla_1 \rangle$ y $\langle \mathbf{B}, \nabla_2 \rangle$ álgebras cuasi-modales. Sea $h \colon A \to B$ un qm-homomorfismo onto. Entonces existe un qm-isomorfismo $f \colon A/\mathrm{Ker} h \to B$ tal que $h = f \circ \pi_K$.

Congruencias cuasi-modales

A una DN-álgebra y sea $f\colon \mathrm{Con}(\mathrm{Fi_f}(A)) \to \mathrm{Con}(A)$ dada por

$$(a, b) \in f(\theta) \Longleftrightarrow ([a), [b)) \in \theta \qquad (\star)$$

Congruencias cuasi-modales

A una DN-álgebra y sea $f\colon \mathrm{Con}(\mathrm{Fi_f}(A)) \to \mathrm{Con}(A)$ dada por

$$(a, b) \in f(\theta) \iff ([a), [b)) \in \theta \qquad (\star)$$

Teorema

A *una DN-álgebra. Sea* $\Diamond$ *un operador modal posibilidad sobre* $\mathrm{Fi_f}(\mathbf{A})$. *Entonces* $f\colon \mathrm{Con}(\langle \mathrm{Fi_f}(A), \Diamond\rangle) \to \mathrm{Con_{qm}}(\langle A, \nabla_\Diamond\rangle)$ *dada por* $(\star)$ *es un isomorfismo.*

Fin

GR∀CI∀S POR ∃SCUCH∀RM∃