Sobre álgebras de semi-Nelson centradas

Juan Manuel Cornejo (1) y Hernán Javier San Martín (2)

CONICET
(1) Departamento de Matemática, UNS
(2) Departamento de Matemática, FCE, UNLP.

Junio de 2019

Algebras de Kleene

Un álgebra de De Morgan es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\sim$ satisface las ecuaciones

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim (x \vee y) =\sim x \wedge \sim y$.

Algebras de Kleene

Un álgebra de De Morgan es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\sim$ satisface las ecuaciones

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Un álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan la cual satisface la desigualdad

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y.$$

Algebras de Kleene

Un álgebra de De Morgan es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\sim$ satisface las ecuaciones

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

Un álgebra de Kleene es un álgebra de De Morgan la cual satisface la desigualdad

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y.$$

Un álgebra de Kleene se llama centrada si tiene un centro. Es decir, si existe un elemento $\mathbf{c}$ tal que

$$\sim \mathbf{c} = \mathbf{c}$$

Este elemento es necesariamente único.

Algebras de Kleene

- Kalman J.A., Lattices with involution. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 485–491 (1958).

Algebras de Kleene

- Kalman J.A., Lattices with involution. Trans. Amer. Math. Soc. 87, 485–491 (1958).

Si L es un retículo distributivo acotado entonces

$$\mathrm{K}(L) := \{(a, b) \in L \times L : a \wedge b = 0\}$$

es un álgebra de Kleene centrada definiendo

$$\begin{aligned}
(a, b) \vee (d, e) &:= (a \vee d, b \wedge e), \\
(a, b) \wedge (d, e) &:= (a \wedge d, b \vee e), \\
\sim (a, b) &:= (b, a),
\end{aligned}$$

$(0, 1)$ como el primer elemento, $(1, 0)$ como el último elemento y $(0, 0)$ como el centro.

Algebras de Nelson

Un álgebra de Nelson es un álgebra de Kleene tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada x, y existe

$$x \to y := x \to_{\mathrm{Hey}} (\sim x \vee y),$$

   siendo $\to_{\mathrm{Hey}}$ la implicación de Heyting.

2. Para cada x, y, z vale la igualdad

$$(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z).$$

Algebras de Nelson

Un álgebra de Nelson es un álgebra de Kleene tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada x, y existe
$$x \to y := x \to_{\mathrm{Hey}} (\sim x \vee y),$$
siendo $\to_{\mathrm{Hey}}$ la implicación de Heyting.
2. Para cada x, y, z vale la igualdad
$$(x \wedge y) \to z = x \to (y \to z).$$

La clase de álgebras de Nelson forma una variedad.

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

- Vakarelov D., Notes on N-lattices and constructive logic with strong negation. Studia Logica 34, 109–125 (1977).

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

- Vakarelov D., Notes on N-lattices and constructive logic with strong negation. Studia Logica 34, 109–125 (1977).

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $\mathrm{K}(H)$ es un álgebra de Nelson, definiendo la implicación en $\mathrm{K}(H)$ como

$$(a, b) \to (d, e) = (a \to d, a \wedge e).$$

2. Sea T un álgebra de Nelson. La relación binaria $\equiv$ sobre T dada por

$$x \equiv y \text{ si y sólo si } x \to y = 1 \text{ e } y \to x = 1$$

es una relación de equivalencia compatible con las operaciones $\wedge$, $\vee$ and $\to$. Más aún, $\mathrm{F}(T) := T/\equiv$ es un álgebra de Heyting.

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong \mathrm{F}(\mathrm{K}(H))$.
2. Si T es un álgebra de Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(\mathrm{F}(T))$.

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong \mathrm{F}(\mathrm{K}(H))$.
2. Si T es un álgebra de Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(\mathrm{F}(T))$.

Más aún, existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de Heyting y la categoría de álgebras de Nelson centradas

Relación entre álgebras de Heyting y álgebras de Nelson

1. Si H es un álgebra de Heyting entonces $H \cong \mathrm{F}(\mathrm{K}(H))$.
2. Si T es un álgebra de Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(\mathrm{F}(T))$.

Más aún, existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de Heyting y la categoría de álgebras de Nelson centradas

Estos resultados (siguiendo una construcción distinta) fueron también obtenidos (en un marco más general) en el siguiente paper:

- Cignoli R., The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras. Algebra Universalis 23, 262–292 (1986).

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

- Sagastume M., Categorical equivalence between centered Kleene algebras with condition (CK) and bounded distributive lattices (Comunicación personal, 2004).

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

- Sagastume M., Categorical equivalence between centered Kleene algebras with condition (CK) and bounded distributive lattices (Comunicación personal, 2004).

1. Si $H \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(H) \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.
2. Si $f : H \to G \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(f) : \mathrm{K}(H) \to \mathrm{K}(G)$ dada por $\mathrm{K}(f)(a, b) = (f(a), f(b))$ es un morfismo en $\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

- Sagastume M., Categorical equivalence between centered Kleene algebras with condition (CK) and bounded distributive lattices (Comunicación personal, 2004).

1. Si $H \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(H) \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.
2. Si $f : H \to G \in \mathrm{Hey}$ entonces $\mathrm{K}(f) : \mathrm{K}(H) \to \mathrm{K}(G)$ dada por $\mathrm{K}(f)(a, b) = (f(a), f(b))$ es un morfismo en $\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$.
3. Si $T \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ entonces

$$\mathrm{C}(T) := \{x \in T : x \geq \mathbf{c}\}$$

es un álgebra de Heyting restringiendo ciertas operaciones de T.

4. Si $f : T \to U \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ entonces $\mathrm{C}(f) : \mathrm{C}(T) \to \mathrm{C}(U)$ dada por $\mathrm{C}(f)(x) = f(x)$ es un morfismo en Hey.

Relación entre las álgebras de Heyting (Hey) y las álgebras de Nelson centradas ($\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$)

1. Si $H \in \mathrm{Hey}$ entonces $\alpha : H \to \mathrm{C}(\mathrm{K}(H))$ dada por
$$\alpha(a) = (a, a \to 0)$$
es un isomorfismo.
2. Si $T \in \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ entonces $\beta : T \to \mathrm{K}(\mathrm{C}(T))$ dada por
$$\beta(x) = (x \vee \mathbf{c}, \sim x \vee \mathbf{c})$$
es un isomorfismo.
3. Los funtores $\mathrm{K} : \mathrm{Hey} \to \mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ y $\mathrm{C} : \mathrm{N}_{\mathbf{c}} \to \mathrm{Hey}$ establecen una equivalencia entre Hey y $\mathrm{N}_{\mathbf{c}}$ con isomorfismos naturales α y β.

Algebras de semi-Heyting

- Sankappanavar H.P, Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras. Actas del IX Congreso Dr. A.R. Monteiro, 33–66 (2008).

Un **álgebra de semi-Heyting** es un álgebra $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que $(H, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo acotado y se satisfacen las siguientes ecuaciones:

1. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$,
2. $a \wedge (b \rightarrow d) = a \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (a \wedge d)]$,
3. $a \rightarrow a = 1$.

Relación entre las álgebras de semi-Heyting y las álgebras de semi-Nelson

Las **álgebras de semi-Nelson** se introducen en

- Cornejo J.M. and Viglizzo I., Semi-Nelson Algebras. Order, vol. 35, Nro. 1, 23–45 (2018).

Relación entre las álgebras de semi-Heyting y las álgebras de semi-Nelson

Las **álgebras de semi-Nelson** se introducen en

- Cornejo J.M. and Viglizzo I., Semi-Nelson Algebras. Order, vol. 35, Nro. 1, 23–45 (2018).

1. Si H es un álgebra de semi-Heyting entonces $\mathrm{K}(H)$ es un álgebra de semi-Nelson.
2. Si T es un álgebra de semi-Nelson entonces $F(T) = T/\equiv$ es un álgebra de semi-Heyting.
3. Si H es un álgebra de semi-Heyting entonces $H \cong F(\mathrm{K}(H))$.
4. Si T es un álgebra de semi-Nelson entonces T es isomorfa a una subálgebra de $\mathrm{K}(F(T))$.

Nuestro trabajo

Existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de semi-Heyting y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas.

Hay dos posibles construcciones:

1. Completar la construcción dada por Cornejo y Viglizzo (construcción que a su vez es extensión de la dada por Vakarelov).
2. Extender la construción dada por Sagastume.

Nuestro trabajo

Existe una equivalencia entre la categoría de álgebras de semi-Heyting y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas.

Hay dos posibles construcciones:

1. Completar la construcción dada por Cornejo y Viglizzo (construcción que a su vez es extensión de la dada por Vakarelov).
2. Extender la construción dada por Sagastume.

- Cornejo J.M. y San Martín H.J., A categorical equivalence between semi-Heyting algebras and centered semi-Nelson algebras. Logic Journal of the IGPL, vol. 26, no. 4, 408–428 (2018).

Observaciones finales

Un retículo de Nelson es un retículo residuado conmutativo integral con 0 e involutivo que satisface una cierta ecuación adicional.

1. La variedad de álgebras de Nelson y la variedad de retículos de Nelson son equivalentes por términos. En particular, si T es un álgebra de Nelson y $\to$ es la implicación del álgebra T entonces la implicación $\hat{\to}$ del correspondiente retículo de Nelson está dada por

$$x \hat{\to} y = (x \to y) \wedge (\sim y \to \sim x).$$

- Busaniche M. and Cignoli R., Constructive Logic with Strong Negation as a Substructural Logic. Journal of Logic and Computation 20 (4), 761–793 (2010).

En todo retículo residuado conmutativo involutivo vale que:

$$x \to y = \neg(x * \neg y),$$

$$x * y = \neg(x \to \neg y).$$

Observaciones finales

Existe una equivalencia entre una categoría denominada KSH (cuya variedad asociada contiene a la variedad de los retículos de Nelson centrados) y la categoría de las álgebras de semi-Heyting.

- Jansana R. and San Martín H.J., On Kalman's functor for bounded hemi-implicative semilattices and hemi-implicative lattices. Logic Journal of the IGPL, vol. 26, no. 1, 47–82 (2018).

Observaciones finales

La categoría KSH y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas son equivalentes.

Observaciones finales

La categoría KSH y la categoría de álgebras de semi-Nelson centradas son equivalentes.

1. La variedad KSH y la variedad de álgebras de semi-Nelson centradas son equivalentes por términos (hay que hacer una construcción distinta a la hecha para probar la equivalencia por términos entre la variedad de álgebras de Nelson y la variedad de álgebras de retículos de Nelson).