

# Sincronía en redes híbridas

Ulises Chialva<sup>1,2</sup>    Walter Reartes<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

<sup>2</sup> Becario doctoral CONICET

Junio 2019

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

- 1 Motivación
  - Sincronía
    - La herramienta
    - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones



Sean  $n$  nodos  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + g(\mathbf{x}_j, W).$$

# Sincronía de redes

Sean  $n$  nodos  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + g(\mathbf{x}_j, W).$$

## Definición

Dos variables  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$  sincronizan completamente si, para ciertas condiciones iniciales, se verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) = 0.$$

La red sincroniza completamente si todas sus variables lo hacen.

## El problema de la sincronía

Determinar condiciones bajo las cuales una red dada sincroniza y determinar la solución de sincronía  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)$ .

# Redes con acoplamiento difusivo

Son redes de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n w_{ij} E(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i).$$

Donde  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$ , y  $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , la matriz  $W = (w_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de acoplamiento.

## Propiedades:

- Permiten comportamientos sincrónicos.
- Relacionan la arquitectura de la red con su comportamiento (matriz  $W$ ).
- Aproximan bien otras redes.

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - **La herramienta**
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# *Master Stability Function (MSF)*

# *Master Stability Function (MSF)*

Propuesta en 1998 por Pecora & Carroll.

# Master Stability Function (MSF)

Propuesta en 1998 por Pecora & Carroll. Consideran redes

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n w_{ij} E(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i).$$

Suponen que hay una solución estable de  $\dot{\mathbf{s}} = f(\mathbf{s})$  y  $\delta\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{s}(t)$ .

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}}_i &= DF\delta\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} E(\delta\mathbf{x}_j - \delta\mathbf{x}_i) \\ &= DF\delta\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij} E\delta\mathbf{x}_j.\end{aligned}$$

$L = (l_{ij}) = (-w_{ij} + \delta_{ij} \sum_k^n w_{ik})$ , es una matriz de Laplace.

# Notación tensorial

Escribamos  $\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$  (concatenados).

Escribamos  $\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$  (concatenados).

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{x}} &= (DF \otimes \mathbb{I}_n) \delta \mathbf{x} + (L \otimes E) \delta \mathbf{x} \\ &= (DF \otimes \mathbb{I}_n + L \otimes E) \delta \mathbf{x}\end{aligned}$$

## Producto de Kronecker

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tendremos

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(nm) \times (nm)}$$

# Descomposición en modos normales

# Descomposición en modos normales

Diagonalizan  $L = P\Lambda P^{-1}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores.  
Hacen el cambio de variables

$$\boldsymbol{\xi} = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta \mathbf{x},$$

y el sistema queda desacoplado (en bloques) de tipo

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = DF\boldsymbol{\xi}_i + \lambda_i E\boldsymbol{\xi}_i. \quad (1)$$

# Descomposición en modos normales

Diagonalizan  $L = P\Lambda P^{-1}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores.

Hacen el cambio de variables

$$\xi = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta \mathbf{x},$$

y el sistema queda desacoplado (en bloques) de tipo

$$\dot{\xi}_i = DF\xi_i + \lambda_i E\xi_i. \quad (1)$$

## *Master Stability Function*

Para cada oscilador  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ , la MSF es la aplicación

$$MSF(\lambda) = \lambda_{\max} : \text{exp. maximal de Lyapunov de (1)}$$

Aplicación: la red sincroniza si para todos los autovalores de  $L$  vale

$$MSF(\lambda_i) < 0.$$



**Generalizaciones:** acoplamientos *on-off*, funcionales integrales y diferenciales, hiperredes, familias conmutativas de acoplamientos, osciladores casi-idénticos, redes con acoplamiento retardado, etc.

**Generalizaciones:** acoplamientos *on-off*, funcionales integrales y diferenciales, hiperredes, familias conmutativas de acoplamientos, osciladores casi-idénticos, redes con acoplamiento retardado, etc.

**Osciladores no suaves** (Coombes 2016): evaluación de la MSF de redes con osciladores no suaves a través de la matriz de salto.

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# Modelo problemático

Coombes (2016) y su grupo (2018) propusieron el sistema:

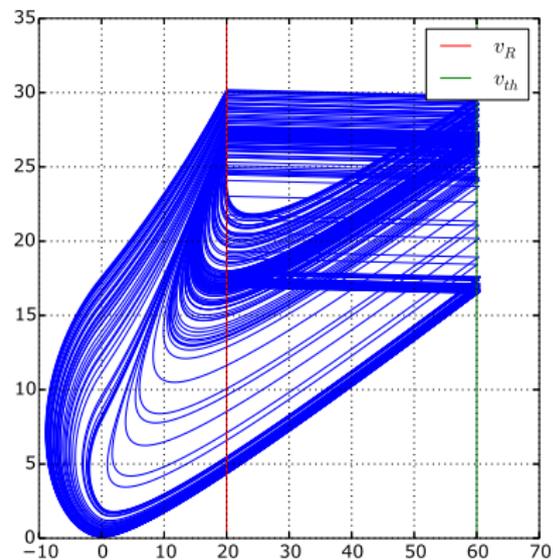
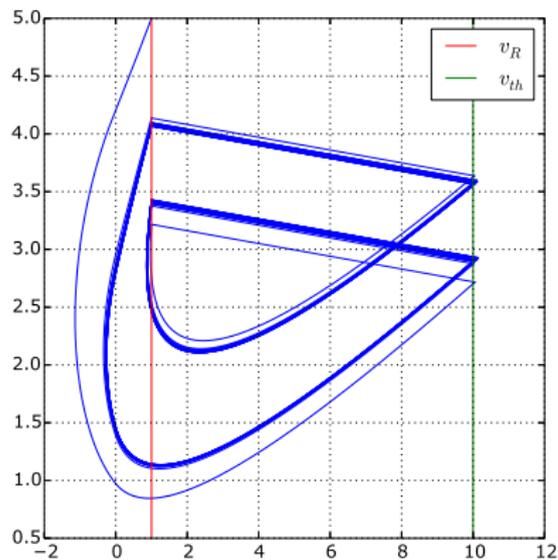
Modelo PWL-IF (*piecewise linear integrate-and-fire model*)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_1 \mathbf{x} + \mu & \text{si } x_1 > 0 \\ \dot{\mathbf{x}} = A_2 \mathbf{x} + \mu & \text{si } x_1 \leq 0 \\ x_1^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}^+ = (v_R, x_2^- + k). \end{cases}$$

donde  $v_R, v_{th}, k \in \mathbb{R}$ , y

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega\beta & -\omega \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -s & -1 \\ \omega\beta & -\omega \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Comportamiento: ciclos y caos.



# Acoplamiento conflictivo

# Acoplamiento conflictivo

El problema surge cuando acoplan de manera difusiva estos osciladores discontinuos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_i = A_1 \mathbf{x}_i + \mu + \sum_{j=1}^n l_{ij} E \mathbf{x}_j \quad \text{si } \mathbf{x}_{1,i} > 0 \\ \dot{\mathbf{x}}_i = A_2 \mathbf{x}_i + \mu + \sum_{j=1}^n l_{ij} E \mathbf{x}_j \quad \text{si } \mathbf{x}_{1,i} \leq 0 \\ \mathbf{x}_{1,i}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}_i^+ = (v_R, \mathbf{x}_{2,i}^- + k). \end{array} \right.$$

Cuando planteamos la ecuación variacional para una trayectoria  $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t))$  obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = A_1 \delta \mathbf{x}_i + \mu + \sum_{j=1}^n l_{ij} E \delta \mathbf{x}_j \quad \text{si } \delta \mathbf{x}_{1,i} + s_1(t) > 0 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i = A_2 \delta \mathbf{x}_i + \mu + \sum_{j=1}^n l_{ij} E \delta \mathbf{x}_j \quad \text{si } \delta \mathbf{x}_{1,i} + s_1(t) \leq 0 \\ \delta \mathbf{x}_{1,i}^- + s_1^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}_i^+ + \mathbf{s}^- = (v_R, \delta \mathbf{x}_{2,i}^- + s_1^- + k). \end{array} \right.$$

## Lo que debe desacoplar...

Si tomamos modos normales  $\xi_j$ , tales que  $\delta \mathbf{x}_i = \sum \alpha_{i,j} \xi_j$ , surgen dificultades...

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_i = A_1 \xi_i + \mu + \lambda_i E \xi_i \quad \text{si} \quad \sum_{j=1} \alpha_{ij} \xi_{1,j} + s_1(t) > 0 \\ \dot{\xi}_i = A_2 \xi_i + \mu + \lambda_i E \xi_i \quad \text{si} \quad \sum_{j=1} \alpha_{ij} \xi_{1,j} + s_1(t) \leq 0 \\ \sum_{j=1} \alpha_{ij} \xi_{1,j}^+ + s_1(t) = v_{th} \rightarrow \sum_{j=1} \alpha_{ij} \xi^+ = (v_R, \sum_{j=1} \alpha_{ij} \xi_{2,j}^- + s_2^-) - \mathbf{s}^+ \end{array} \right.$$

$\mathbf{H}(\mathbf{z}_i) = (s_i, 0, 0, 0)^T$ . The MSF approach for a smooth network gives rise to a Floquet problem with a Jacobian  $D\mathbf{F}(\mathbf{s}) + \sigma\lambda_l D\mathbf{H}(\mathbf{s})$ , where  $\lambda_l$  is an eigenvalue of the coupling matrix  $W$ . The corresponding Jacobian for the PWL-IF network is  $A_{L,R} + \sigma\lambda_l D\mathbf{H}$ , with the label  $L$  or  $R$  chosen according to whether the synchronous orbit is in  $S_L$  or  $S_R$ . Moreover,  $D\mathbf{H}$  is now a constant matrix with  $[D\mathbf{H}]_{ij} = 1$  if  $i = 1$  and  $j = 3$ , and is 0 otherwise.

# Lo que finalmente desacopla...

$\mathbf{H}(\mathbf{z}_i) = (s_i, 0, 0, 0)^T$ . The MSF approach for a smooth network gives rise to a Floquet problem with a Jacobian  $D\mathbf{F}(\mathbf{s}) + \sigma\lambda_l D\mathbf{H}(\mathbf{s})$ , where  $\lambda_l$  is an eigenvalue of the coupling matrix  $W$ . The corresponding Jacobian for the PWL-IF network is  $A_{L,R} + \sigma\lambda_l D\mathbf{H}$ , with the label  $L$  or  $R$  chosen according to whether the synchronous orbit is in  $S_L$  or  $S_R$ . Moreover,  $D\mathbf{H}$  is now a constant matrix with  $[D\mathbf{H}]_{ij} = 1$  if  $i = 1$  and  $j = 3$ , and is 0 otherwise.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A_1 \xi_i + \mu + \lambda_i E \xi_i & \text{si } s_1(t) > 0 \\ \dot{\xi}_i = A_2 \xi_i + \mu + \lambda_i E \xi_i & \text{si } s_1(t) \leq 0 \\ \text{Reseteo cuando } \mathbf{s}_1^- = v_{th}. \end{cases}$$

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 **Redes híbridas**
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# Construcción de la red

# Construcción de la red

Sean  $n$  nodos  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^m$  acoplados mediante la matriz de Laplace  $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  $A, E, R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $F, I \in \mathbb{R}^m$  y  $v_{th} \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij} E\mathbf{x}_j \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F \cdot \mathbf{x}_j = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}_i^+ = R\mathbf{x}^- + I \end{array} \right.$$

NOTA:  $L$  siempre será simétrica.

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 **Redes híbridas**
  - **Propiedades**
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# Solución de sincronía

Suponemos una solución  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = A\mathbf{s} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{s}^+ = R\mathbf{s}^- + I. \end{cases} \quad (2)$$

Suponemos una solución  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_1(t) = \dots = \mathbf{x}_n(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = A\mathbf{s} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{s}^+ = R\mathbf{s}^- + I. \end{cases} \quad (2)$$

## Propiedad 1

Observemos que esta solución  $\mathbf{s}(t)$  no lo es del oscilador aislado.

# Solución promedio

# Solución promedio

Definimos la *variable promedio*  $\mathbf{u} =: \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{u} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} E \mathbf{x}_j = A\mathbf{u} \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F \cdot \mathbf{x}_j^- = F \cdot \mathbf{u}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{u}^+ = R\mathbf{u}^- + I. \end{array} \right.$$

# Solución promedio

Definimos la *variable promedio*  $\mathbf{u} =: \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{u} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} E \mathbf{x}_j = A\mathbf{u} \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F \cdot \mathbf{x}_j^- = F \cdot \mathbf{u}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{u}^+ = R\mathbf{u}^- + I. \end{array} \right.$$

Comparamos con el sistema (2) y tenemos

# Solución promedio

Definimos la *variable promedio*  $\mathbf{u} =: \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{u} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} E \mathbf{x}_j = A\mathbf{u} \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F \cdot \mathbf{x}_j^- = F \cdot \mathbf{u}^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{u}^+ = R\mathbf{u}^- + I. \end{cases}$$

Comparamos con el sistema (2) y tenemos

## Propiedad 2

La solución de sincronía coincide con el promedios de los nodos.



Tomamos  $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{s}$  y tenemos:

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = A\delta \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij}(E\mathbf{x}_j - E\mathbf{s}) = A\delta \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^n l_{ij}E\delta \mathbf{x}_j \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}_i^+ = R\delta \mathbf{x}_i^- \end{cases} \quad (3)$$

## Observación

Quedó el reseteo desacoplado y dependiendo únicamente de  $\mathbf{s}(t)$ .

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 **Redes híbridas**
  - Propiedades
  - **MSF de la red**
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# Descomposición en modos normales

Utilizamos la notación tensorial

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \delta \mathbf{x} + (L \otimes E) \delta \mathbf{x} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}^+ = (\mathbb{I}_n \otimes R) \delta \mathbf{x}^- . \end{cases}$$

Utilizamos la notación tensorial

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \delta \mathbf{x} + (L \otimes E) \delta \mathbf{x} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}^+ = (\mathbb{I}_n \otimes R) \delta \mathbf{x}^- . \end{cases}$$

Si  $L = P \Lambda P^{-1}$ , hacemos  $\boldsymbol{\xi} = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta \mathbf{x}$

Utilizamos la notación tensorial

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \delta \mathbf{x} + (L \otimes E) \delta \mathbf{x} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}^+ = (\mathbb{I}_n \otimes R) \delta \mathbf{x}^- . \end{cases}$$

Si  $L = P \Lambda P^{-1}$ , hacemos  $\xi = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta \mathbf{x}$

$$\dot{\xi} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \xi + (\Lambda \otimes E) \xi,$$

Utilizamos la notación tensorial

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \delta \mathbf{x} + (L \otimes E) \delta \mathbf{x} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}^+ = (\mathbb{I}_n \otimes R) \delta \mathbf{x}^- . \end{cases}$$

Si  $L = P \Lambda P^{-1}$ , hacemos  $\boldsymbol{\xi} = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta \mathbf{x}$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \boldsymbol{\xi} + (\Lambda \otimes E) \boldsymbol{\xi},$$

para el reseteo tenemos

Utilizamos la notación tensorial

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \delta \mathbf{x} + (L \otimes E) \delta \mathbf{x} \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \delta \mathbf{x}^+ = (\mathbb{I}_n \otimes R) \delta \mathbf{x}^- . \end{cases}$$

Si  $L = P \Lambda P^{-1}$ , hacemos  $\boldsymbol{\xi} = (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} \delta \mathbf{x}$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbb{I}_n \otimes A) \boldsymbol{\xi} + (\Lambda \otimes E) \boldsymbol{\xi},$$

para el reseteo tenemos

$$\begin{aligned} F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \boldsymbol{\xi}^+ &= (P \otimes \mathbb{I}_m)^{-1} (\mathbb{I}_n \otimes R) (P \otimes \mathbb{I}_m) \boldsymbol{\xi}^- \\ &= (\mathbb{I}_n \otimes R) \boldsymbol{\xi}^- . \end{aligned}$$



Como  $L = P\Lambda P^{-1}$  con  $\Lambda$  diagonal, sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los autovalores. El sistema resulta desacoplado (en bloques):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A\xi_i + \lambda_i E\xi_i \\ F \cdot s^- = v_{th} \rightarrow \xi_i^+ = R\xi_i^- \end{cases} \quad (4)$$

Como  $L = P\Lambda P^{-1}$  con  $\Lambda$  diagonal, sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los autovalores. El sistema resulta desacoplado (en bloques):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A\xi_i + \lambda_i E\xi_i \\ F \cdot s^- = v_{th} \rightarrow \xi_i^+ = R\xi_i^- \end{cases} \quad (4)$$

## *Master Stability Function*

Para la red híbrida, la MSF es la aplicación

$$MSF(\lambda) = \lambda_{\text{máx}} : \text{exp. maximal de Lyapunov de (4)}$$

# MSF de la red

Como  $L = P\Lambda P^{-1}$  con  $\Lambda$  diagonal, sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los autovalores. El sistema resulta desacoplado (en bloques):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A\xi_i + \lambda_i E\xi_i \\ F \cdot s^- = v_{th} \rightarrow \xi_i^+ = R\xi_i^- \end{cases} \quad (4)$$

## *Master Stability Function*

Para la red híbrida, la MSF es la aplicación

$$MSF(\lambda) = \lambda_{\text{máx}} : \text{exp. maximal de Lyapunov de (4)}$$

Aplicación: la red sincroniza si para todos los autovalores de  $L$  vale

$$MSF(\lambda_i) < 0.$$

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones



# Oscilador de Nakano-Saito

Consideremos el siguiente oscilador bidimensional propuesto por Nakano y Saito (2002)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ x_1^- = v_{th} \rightarrow \mathbf{x}^+ = R\mathbf{x}^- + I, \end{cases}$$

donde

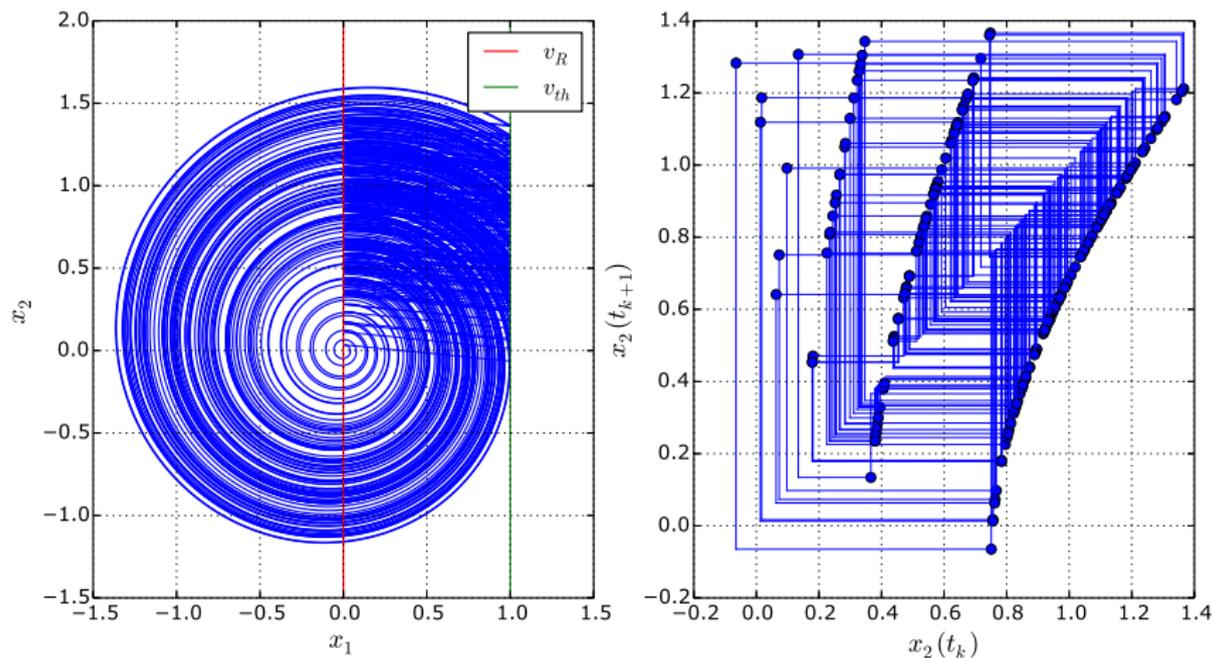
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \rho & 1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} v_R \\ b \end{pmatrix}.$$

Además  $\rho > 0$  y  $v_R < v_{th}$ .

## Observación

El oscilador admite comportamiento caótico.

# Oscilador de Nakano-Saito



# Redes híbridas de osciladores NS

# Redes híbridas de osciladores NS

Consideraremos redes híbridas de osciladores NS, con

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

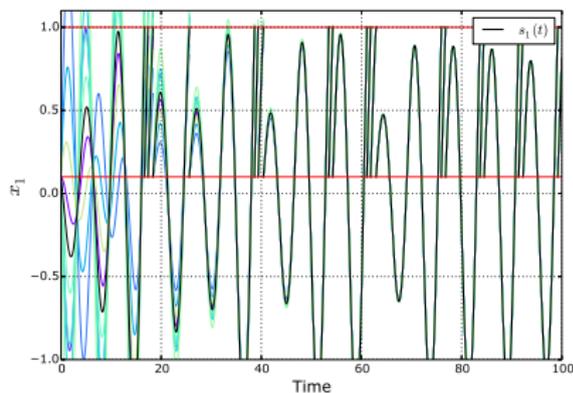
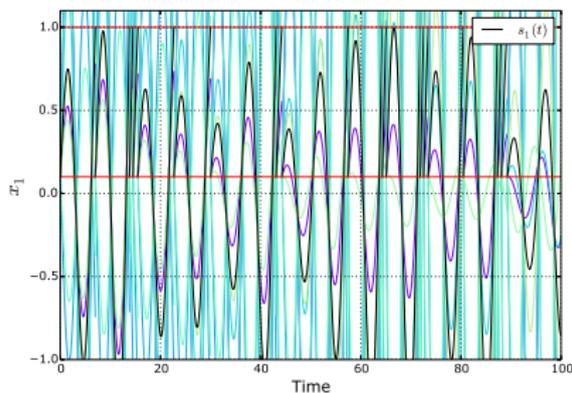


Figura : Series temporales de  $x_1$  (parametros:  $\rho = 0,1$ ,  $b = 0,1$ ,  $v_{th} = 1$ ,  $v_R = 0$ ).



# Redes híbridas de osciladores NS

Consideremos redes híbridas de osciladores  $\dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{x}_i$ , acopladas por una matriz de Laplace  $L$  simétrica y con el  $E$  y  $F$  ya definidos.

Tal red posee un oscilador NS como solución de sincronía  $\mathbf{s}(t)$ .

# Redes híbridas de osciladores NS

Consideremos redes híbridas de osciladores  $\dot{\mathbf{x}}_i = A\mathbf{x}_i$ , acopladas por una matriz de Laplace  $L$  simétrica y con el  $E$  y  $F$  ya definidos.

Tal red posee un oscilador NS como solución de sincronía  $\mathbf{s}(t)$ .

El problema:

## Sistema MSF

Debemos hallar  $\lambda_{\text{máx}}$  de

$$\begin{cases} \xi = (A + \lambda E)\xi \\ F \cdot \mathbf{s}^- = v_{th} \rightarrow \xi^+ = R\xi^- \end{cases}$$

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - **Método de cálculo**
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# La matriz de salto

## Formalismo

Dado un sistema  $\dot{\xi} = g(\xi)$  con reseteos en los instantes  $t_k$ , bajo ciertas condiciones, existe una función matricial  $Q(t)$  tal que la variación  $\delta\xi$  en torno a una órbita dada, puede estimarse mediante la fórmula

$$\delta\xi(t_n) \approx Q(t_n)G(t_n - t_{n-1})\dots Q(t_1)G(t_1 - t_0)\delta\xi(t_0), \quad (5)$$

siendo  $G(t)$  la solución del sistema.

## Formalismo

Dado un sistema  $\dot{\xi} = g(\xi)$  con reseteos en los instantes  $t_k$ , bajo ciertas condiciones, existe una función matricial  $Q(t)$  tal que la variación  $\delta\xi$  en torno a una órbita dada, puede estimarse mediante la fórmula

$$\delta\xi(t_n) \approx Q(t_n)G(t_n - t_{n-1})\dots Q(t_1)G(t_1 - t_0)\delta\xi(t_0), \quad (5)$$

siendo  $G(t)$  la solución del sistema.

## Aplicación

Usando la fórmula (5) estimamos el límite

$$\lambda_{\text{máx}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log \left( \frac{\|\delta\xi(t_k)\|}{\|\delta\xi(0)\|} \right).$$

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# MSF de una red NS

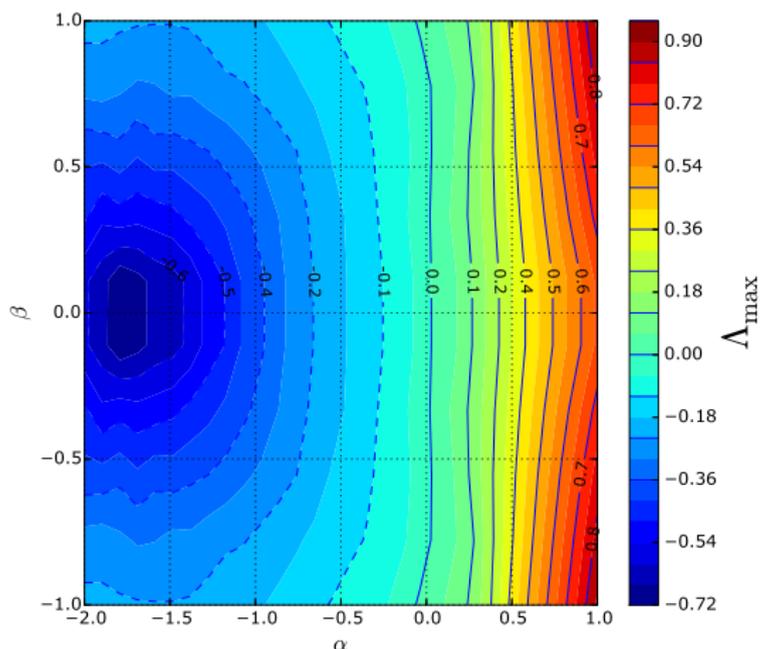


Figura : MSF de la red híbrida cuyo estado de sincronía es un oscilador NS (con  $\rho = 0,1$ ,  $b = 0,1$ ,  $v_{th} = 1$ ,  $v_R = 0$ ). Se realizaron 100 iteraciones.

- 1 Motivación
  - Sincronía
  - La herramienta
  - El problema
- 2 Redes híbridas
  - Propiedades
  - MSF de la red
- 3 Ejemplo de aplicación
  - Oscilador de Nakano-Saito
  - Método de cálculo
  - Evaluación de la MSF
- 4 Conclusiones

# Consideraciones finales

## Algunas conclusiones...

- La red híbrida sincroniza si todos los autovalores de  $L$  tienen parte real negativa.
- Hay una *región pozo* donde la sincronía es más robusta.
- **Es posible vincular la MSF y los osciladores híbridos.**

## Algunas conclusiones...

- La red híbrida sincroniza si todos los autovalores de  $L$  tienen parte real negativa.
- Hay una *región pozo* donde la sincronía es más robusta.
- **Es posible vincular la MSF y los osciladores híbridos.**

## Cuestiones pendientes...

- Extender la MSF a otros casos más generales.
- Acoplar osciladores no autónomos.
- **Estudiar en detalle sistemas lineales a trozos.**

**MUCHAS GRACIAS.**