

Redes neuronales competitivas con inputs dependientes del tiempo

Andrea Bel ^{1,2} Romina Cobiaga ¹ Walter Reartes ¹

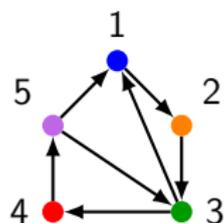
¹Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina

²INMABB, CONICET, Argentina

XV Congreso Dr. A. Monteiro - Junio 2019

Modelo no diferenciable para una red competitiva

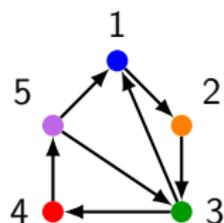
$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$



- ◆ x_i : nivel de actividad del nodo i
- ◆ $\theta_i \in \mathbb{R}^+$: impulso externo constante
- ◆ $W_{ij} \leq 0$: conexión inhibitoria de j a i
- ◆ $[\cdot]_+ = \max(0, \cdot)$

Modelo no diferenciable para una red competitiva

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$



- ◆ x_i : nivel de actividad del nodo i
- ◆ $\theta_i \in \mathbb{R}^+$: impulso externo constante

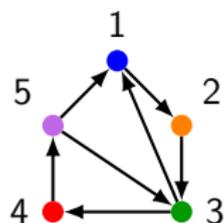
- ◆ $W_{ij} \leq 0$: conexión inhibitoria de j a i
- ◆ $[\cdot]_+ = \max(0, \cdot)$

Aplicaciones

- Redes de neuronas corticales (Tang et al., 2005)
- Codificación y recuperación de patrones de memoria (Curto et al., 2012)
- Redes Winner-Take-All multiestables

Modelo no diferenciable para una red competitiva

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + \theta_i \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$



- ◆ x_i : nivel de actividad del nodo i
- ◆ $\theta_i \in \mathbb{R}^+$: impulso externo constante

- ◆ $W_{ij} \leq 0$: conexión inhibitoria de j a i
- ◆ $[\cdot]_+ = \max(0, \cdot)$

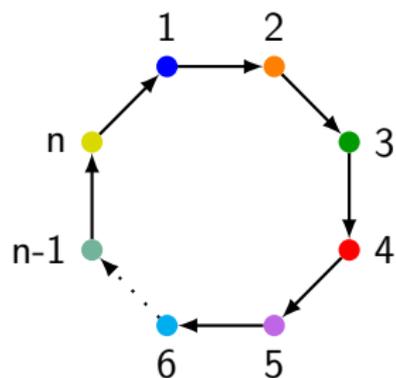
Aplicaciones

- Redes de neuronas corticales (Tang et al., 2005)
- Codificación y recuperación de patrones de memoria (Curto et al., 2012)
- Redes Winner-Take-All multiestables

Resultados

- equilibrios en redes con impulsos distintos (Hahnloser et al., 2003) y con impulsos iguales (Curto, Morrison, 2016)
- se han observado **ciclos límite** y **atractores caóticos** (Parmelee, 2016; Morrison et al., 2016)

Red competitiva con n nodos y topología tipo anillo

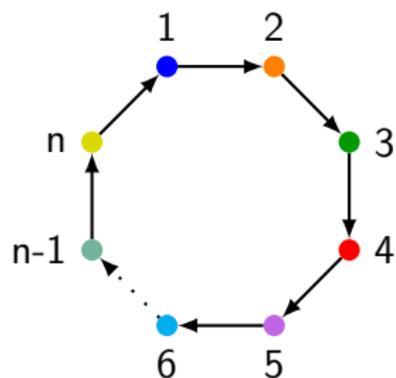


◆ Inhibición $\begin{cases} \text{débil: } W_{ij} = -1 + \epsilon \\ \text{fuerte: } W_{ji} = -1 - \delta \end{cases}$

$$W_{ii} = 0, \forall i$$

◆ $\epsilon \in (0, 1), \delta \in \mathbb{R}^+$ ◆ $\theta_i = 1, \forall i$

Red competitiva con n nodos y topología tipo anillo



◆ Inhibición $\begin{cases} \text{débil: } W_{ij} = -1 + \epsilon \\ \text{fuerte: } W_{ji} = -1 - \delta \end{cases}$

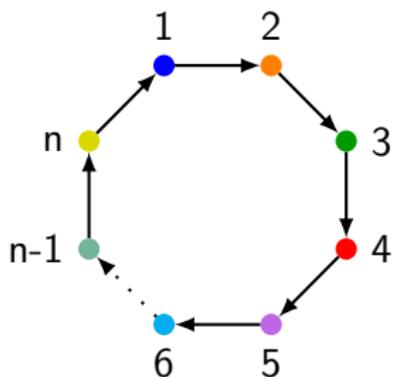
$$W_{ii} = 0, \forall i$$

◆ $\epsilon \in (0, 1)$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ ◆ $\theta_i = 1, \forall i$

Ejemplo con tres nodos:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \delta & -1 + \epsilon \\ -1 + \epsilon & 0 & -1 - \delta \\ -1 - \delta & -1 + \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

Red competitiva con n nodos y topología tipo anillo



◆ Inhibición $\left\{ \begin{array}{l} \text{débil: } W_{ij} = -1 + \epsilon \\ \text{fuerte: } W_{ji} = -1 - \delta \end{array} \right.$

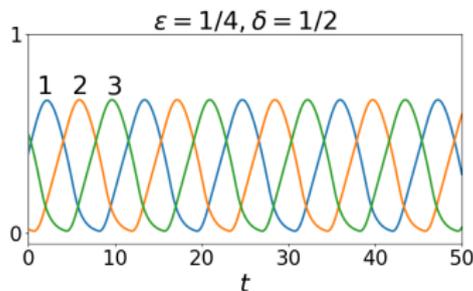
$$W_{ii} = 0, \forall i$$

◆ $\epsilon \in (0, 1), \delta \in \mathbb{R}^+$ ◆ $\theta_i = 1, \forall i$

Ejemplo con tres nodos:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \delta & -1 + \epsilon \\ -1 + \epsilon & 0 & -1 - \delta \\ -1 - \delta & -1 + \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

● ciclo estable si $\epsilon < \delta$



Ciclos en la red anillo de n nodos

- Si $n \geq 3$ se observan ciclos estables cuando $\epsilon < \delta$.
- La activación es secuencial y se verifica

$$x_i(t) = x_1 \left(t - \frac{i-1}{n} T \right), \quad i = 2, \dots, n,$$

siendo T el período del ciclo.

Ciclos en la red anillo de n nodos

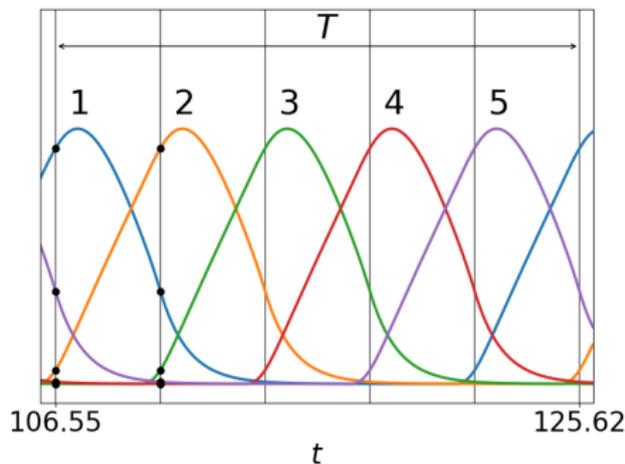
- Si $n \geq 3$ se observan ciclos estables cuando $\epsilon < \delta$.
- La activación es secuencial y se verifica

$$x_i(t) = x_1 \left(t - \frac{i-1}{n} T \right), \quad i = 2, \dots, n,$$

siendo T el período del ciclo.

Ejemplo con 5 nodos \implies

Podemos dividir el ciclo en n partes y alcanza con calcular las expresiones en un intervalo de longitud T/n .



Expresión analítica del ciclo

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\diamond f_i(x) = \sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \quad \diamond \Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\}$$

Expresión analítica del ciclo

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

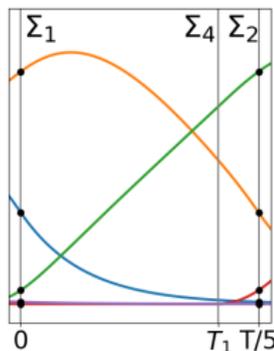
$$\diamond f_i(x) = \sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \quad \diamond \Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\}$$

Consideramos el intervalo $[0, T/n]$ y $x(0) \in \Sigma_1 \implies x(T/n) \in \Sigma_2$

Existe $T_1 \in (0, T/n)$ tal que:

- $x(T_1) \in \begin{cases} \Sigma_1 & n = 3 \\ \Sigma_4 & n \geq 4 \end{cases}$
- $f_{2,3}(x(t)) > 0 \quad t \in (0, T_1)$
- $\begin{cases} f_{1,2,3}(x(t)) > 0 & n = 3 \\ f_{2,3,4}(x(t)) > 0 & n \geq 4 \end{cases} \quad t \in (T_1, T/n)$

Resolvemos la EDO lineal en cada región e imponemos la condición de continuidad en $t = T_1$.



Expresión analítica del ciclo

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \right]_+, \quad i = 1, \dots, n,$$

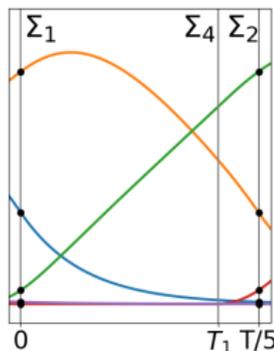
$$\diamond f_i(x) = \sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \quad \diamond \Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\}$$

Consideramos el intervalo $[0, T/n]$ y $x(0) \in \Sigma_1 \implies x(T/n) \in \Sigma_2$

Existe $T_1 \in (0, T/n)$ tal que:

- $x(T_1) \in \begin{cases} \Sigma_1 & n = 3 \\ \Sigma_4 & n \geq 4 \end{cases}$
- $f_{2,3}(x(t)) > 0 \quad t \in (0, T_1)$
- $\begin{cases} f_{1,2,3}(x(t)) > 0 & n = 3 \\ f_{2,3,4}(x(t)) > 0 & n \geq 4 \end{cases} \quad t \in (T_1, T/n)$

Resolvemos la EDO lineal en cada región e imponemos la condición de continuidad en $t = T_1$.



Por las condiciones inicial y final en $[0, T/n]$ se puede obtener un sistema de dos ecuaciones con las incógnitas T_1 y T .

Cambios en el ciclo para la red anillo de n nodos

Suponemos que $\epsilon < \delta$ y $n \geq 3 \implies$ existe un **ciclo estable** en la red

Cambios en el ciclo para la red anillo de n nodos

Suponemos que $\epsilon < \delta$ y $n \geq 3 \implies$ existe un **ciclo estable** en la red

Frecuencia

- ♦ decrece si el número de nodos n aumenta
- ♦ crece si ϵ aumenta (la inhibición débil $-1 + \epsilon$ es más débil)
- ♦ crece si δ aumenta (la inhibición fuerte $-1 - \delta$ es más fuerte)

Cambios en el ciclo para la red anillo de n nodos

Suponemos que $\epsilon < \delta$ y $n \geq 3 \implies$ existe un **ciclo estable** en la red

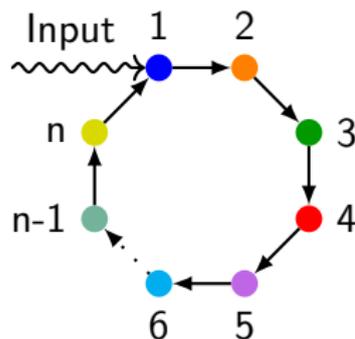
Frecuencia

- ◆ decrece si el número de nodos n aumenta
- ◆ crece si ϵ aumenta (la inhibición débil $-1 + \epsilon$ es más débil)
- ◆ crece si δ aumenta (la inhibición fuerte $-1 - \delta$ es más fuerte)

Amplitud

- ◆ no cambia si n aumenta
- ◆ decrece si ϵ aumenta
- ◆ si $\epsilon \rightarrow 0$ la actividad de cada nodo está cerca de cero por más tiempo en un período

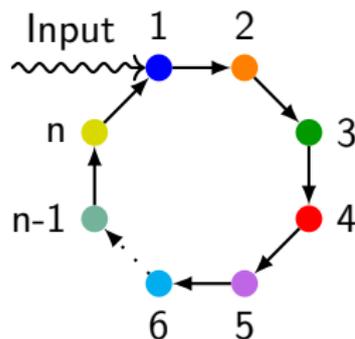
Red anillo con input periódico



$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + \left[\sum_{j=1}^n W_{1j}x_j + 1 + I(t) \right]_+,$$
$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij}x_j + 1 \right]_+, \quad i \geq 2$$

Input oscilatorio: $I(t) = A_{in} \frac{1 + \sin(\omega_{in}t)}{2}$ siendo $\omega_{in} = \frac{2\pi f_{in}}{1000}$

Red anillo con input periódico

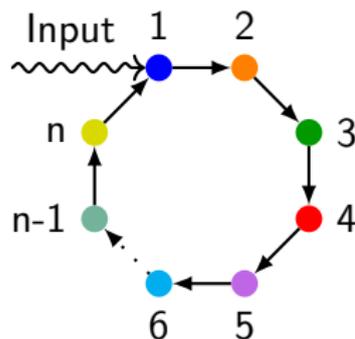


$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + \left[\sum_{j=1}^n W_{1j} x_j + 1 + I(t) \right]_+,$$
$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \right]_+, \quad i \geq 2$$

Input oscilatorio: $I(t) = A_{in} \frac{1 + \sin(\omega_{in} t)}{2}$ siendo $\omega_{in} = \frac{2\pi f_{in}}{1000}$

El ciclo es **entrenado** por el input si $f_{ciclo}/f_{in} = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Red anillo con input periódico



$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + \left[\sum_{j=1}^n W_{1j} x_j + 1 + I(t) \right]_+,$$

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \left[\sum_{j=1}^n W_{ij} x_j + 1 \right]_+, \quad i \geq 2$$

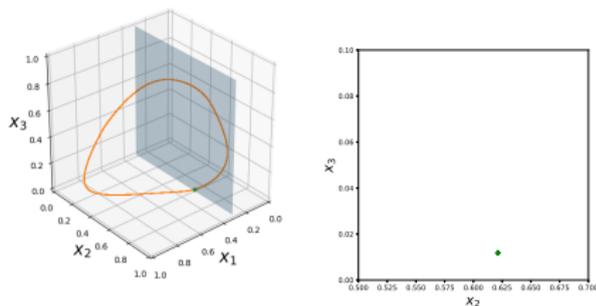
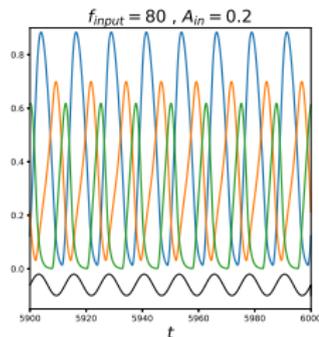
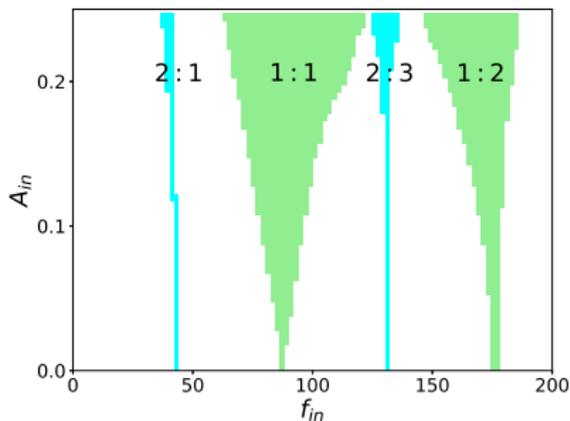
Input oscilatorio: $I(t) = A_{in} \frac{1 + \sin(\omega_{in} t)}{2}$ siendo $\omega_{in} = \frac{2\pi f_{in}}{1000}$

El ciclo es **entrenado** por el input si $f_{ciclo}/f_{in} = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Estudiamos las lenguas de Arnol'd: diagramas de bifurcación con parámetros A_{in} y f_{in} , que muestran las regiones de entrenamiento del ciclo.

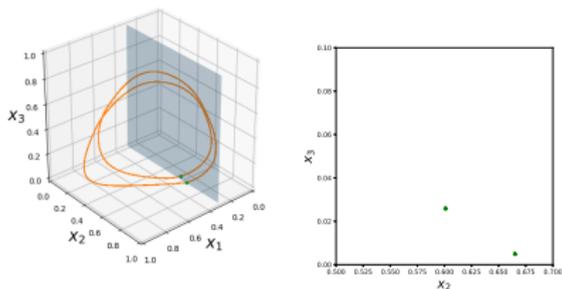
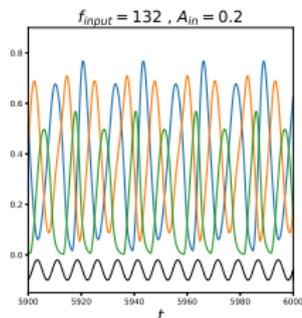
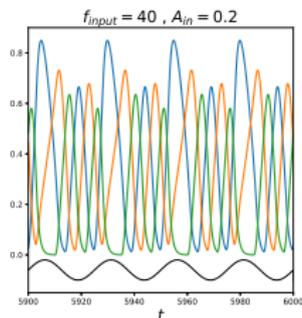
Lenguas de Arnol'd: ejemplo de red con 3 nodos

Regiones de entrenamiento $p : q$
tomando una sección de Poincaré
adecuada

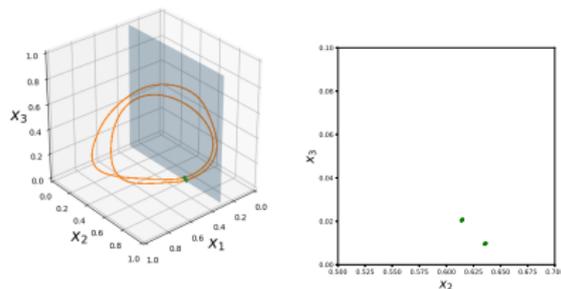


Ciclo entrenado 1:1

Distintos ciclos entrenados

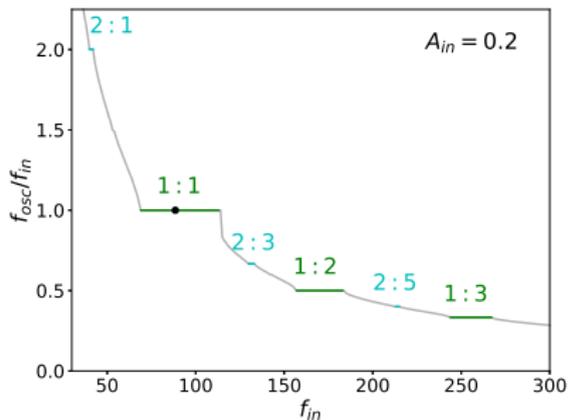
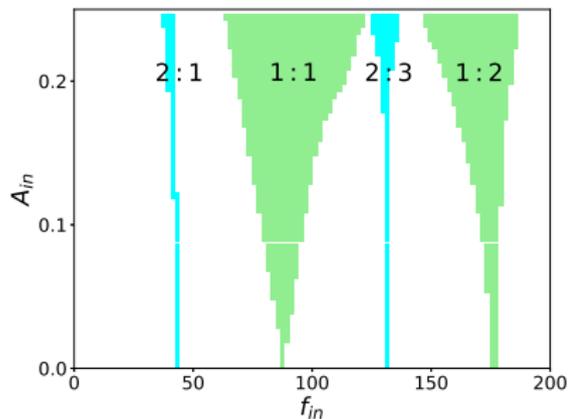


Ciclo entrenado 2:1

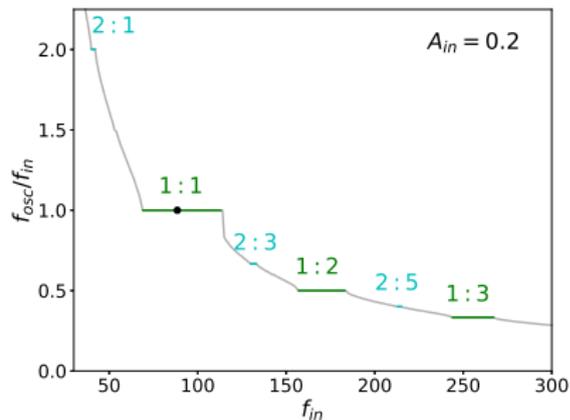
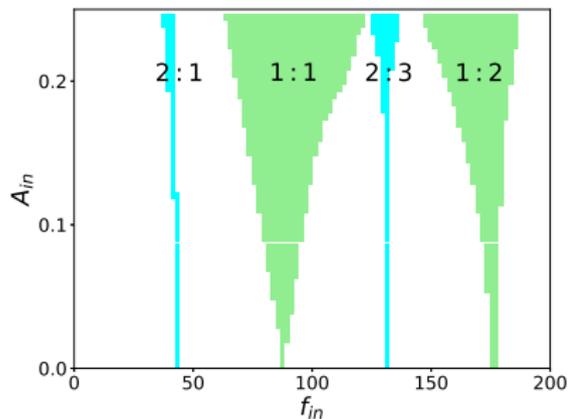


Ciclo entrenado 2:3

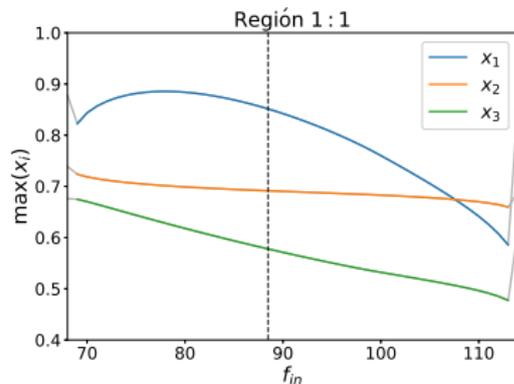
Mesetas de entrenamiento y valor máximo de actividad



Mesetas de entrenamiento y valor máximo de actividad

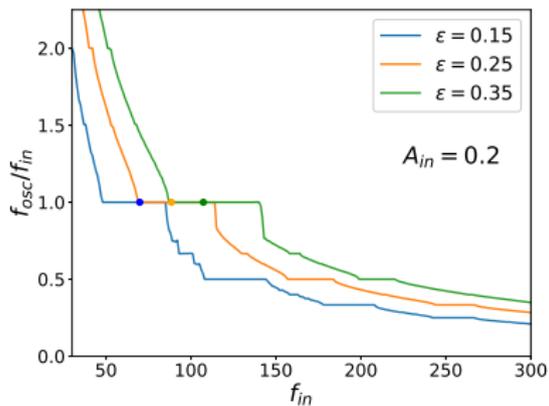


El valor máximo de la actividad de cada nodo no se mantiene constante al variar la frecuencia del input

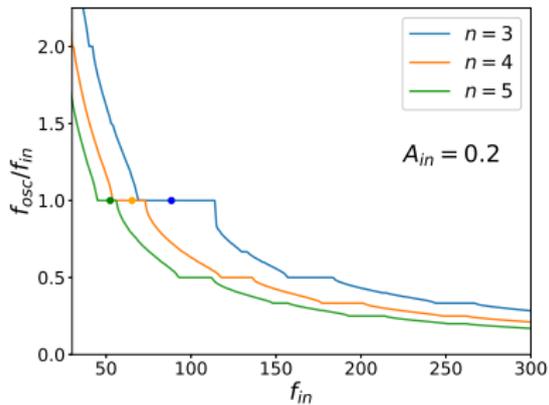


Distintas redes anillo

Variando la inhibición débil $-1 + \epsilon$



Variando la cantidad de nodos



Conclusiones

- Calculamos los ciclos estables en la red anillo competitiva de n nodos con input constantes iguales
- Describimos los cambios en el ciclo al variar la cantidad de nodos y las constantes de conexión
- Hallamos regiones de entrenamiento de los ciclos cuando se aplica un input sinusoidal a uno de los nodos de la red

Muchas gracias