Una Dualidad Topológica para Álgebras de Boole Bitopológicas

Carlos Ernesto Scirica
Universidad Nacional de San Martín

Resumen

Al Inicio de este trabajo, recordamos los principales resultados acerca de las Álgebras de Boole Bitopológicas (ver por ejemplo [2], [4] o [6]) y a partir de ellas construimos Álgebras de Heyting. Como una aplicación importante, mostramos un enfoque bitopológico de la Completación de Dedekind-MacNeille en el caso particular de Álgebras de Heyting. Y finalmente construimos explícitamete una dualidad categórica entre estas Álgebras con una categoría particular de Espacios Topológicos con ciertas propiedades.

Definition

Un Álgebra de Boole Topológica es un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \neg, ^\circ, 0, 1\rangle$ de tipo $\langle 2, 2, 1, 1, 0, 0\rangle$ tal que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ es un Álgebra de Boole y la operación unaria *"interior"* $^\circ$ verifica las siguientes identidades:

$1^\circ \approx 1$

$(a^\circ) \wedge a \approx a^\circ$

$(a^\circ)^\circ \approx a^\circ$

$(a \wedge b)^\circ \approx a^\circ \wedge b^\circ$

Definition

Sea A un Álgebra de Boole Topológica y sea $a \in A$. Diremos que a es *abierto* si $a^\circ = a$. Notaremos $O(A) = \{a \in A \ / \ a^\circ = a\}$.

Definition

En un Álgebra de Boole Topológica definimos la operación unaria *"clausura"* $^-$, como $\overline{a} = \neg((\neg a)^\circ)$ Notaremos $C(A) = \{a \in A \ / \ \overline{a} = a\}$.

Theorem

Sea A un Álgebra de Boole Topológica y sean $a, b \in A$. Entonces:

1. $\neg(\overline{a}) = (\neg a)^{\circ}$
2. $\neg(a^{\circ}) = \overline{(\neg a)}$
3. $\overline{0} = 0$
4. $a \vee \overline{a} = \overline{a}$
5. $\overline{\overline{a}} = \overline{a}$
6. $(\overline{a \vee b}) = (\overline{a}) \vee (\overline{b})$

Theorem

Sea A un Álgebra de Boole con un operador $^{-}$ que llamaremos "clausura"que verifica los siguientes cuatro axiomas:

1. $\overline{0} = 0$
2. $a \vee \overline{a} = a$
3. $\overline{\overline{a}} = \overline{a}$
4. $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$

Si defino un operador unario $^{\circ}$ como $a^{\circ} = \neg\left(\overline{\neg a}\right)$, entonces el Álgebra de Boole A junto al operador $^{\circ}$, resulta un Álgebra de Boole topológica. Además, si defino la operación "clausura^2" como $\overline{a}^2 = \neg\left((\neg a)^{\circ}\right)$, entonces $^{-} = ^{-_2}$. En consecuencia, para definr un Álgebra de Boole Topológica, es equivalente agregarle a un Álgebra de Boole un operador de clausura o un operador de interior.

Theorem

Sean A un Álgebra de Boole Topológica, sean $a, b \in A$ y sea $\leq$ el orden dado por el Álgebra de Boole, es decir, $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. Entonces:

1. $a \leq b \Rightarrow a^\circ \leq b^\circ$. *En consecuencia,* $a^\circ \vee b^\circ \leq (a \vee b)^\circ$ *y si* $a \leq b$ *y* $a \in O(A)$ *entonces* $\Rightarrow a \leq b^\circ$.
2. $a \leq b \Rightarrow \overline{a} \leq \overline{b}$. *En consecuencia,* $\overline{a \wedge b} \leq \overline{a} \wedge \overline{b}$ *y si* $a \leq b$ *y* $b \in C(A)$ *entonces* $\overline{a} \leq b$.
3. $a \in O(A) \Leftrightarrow \neg a \in C(A)$.
4. *Si* $a \in O(A)$ *y* $a \wedge \overline{b} \neq 0$, *entonces* $a \wedge b \neq 0$.

Theorem

1. *Si* $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq O(A)$ *entonces* $(a_1 \vee .... \vee a_n) \in O(A)$ *y* $(a_1 \wedge .... \wedge a_n) \in O(A)$.
2. *Si* $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq C(A)$ *entonces* $(a_1 \vee .... \vee a_n) \in C(A)$ *y* $(a_1 \wedge .... \wedge a_n) \in C(A)$.
3. *Si* $\{a_j\}_{j \in J} \subseteq O(A)$ *y existe* $a = \bigvee_{j \in J} a_j$, *entonces* $a \in O(A)$.
4. *Si* $\{a_j\}_{j \in J} \subseteq C(A)$ *y existe* $a = \bigwedge_{j \in J} a_j$, *entonces* $a \in C(A)$.

Remark

Por el teorema anterior, si A es un Álgebra de Boole Topológica, entonces $O(A)$ y $C(A)$ son subreticulados acotados de A.

Definition

Sean A Álgebra de Boole y S subreticulado acotado de A. Entonces:

1. S es *relativamente completo superiormente* en A, si $\forall a \in A$, $I(a) = \{x \in S / x \leq a\}$ tiene máximo.
2. S es *relativamente completo inferiormente* en A, si $\forall a \in A$, $C(a) = \{x \in S / x \leq a\}$ tiene mínimo.

Remark

Sea A Álgebra de Boole y S subreticulado acotado de A. Entonces S es *relativamente completo superiormente* $\iff \neg S = \{\neg a / a \in S\}$ es *relativamente completo inferiormente*.

Theorem

Sea A un Álgebra de Boole. Entonces:

1. *Si $^\circ$ es un operador de interior de A, la imagen de $^\circ$, el conjunto $Im(^\circ) = O(A)$, es un subreticulado acotado relativamente completo superiormente de A.*
2. *Si $^-$ es un operador de clausura de A, la imagen de $^-$, el conjunto $Im(^-) = C(A)$, es un subreticulado acotado relativamente completo inferiormente de A.*

Theorem

Sean A Álgebra de Boole y sea S un subreticulado acotado de A de A. Entonces:

1. *Si S es relativamente completo superiormente y defino el operador $^\circ$ como $a^\circ = max\{x \in S / x \leq a\}$, entonces $^\circ$ es un operador de interior de A.*
2. *Si S es relativamente completo inferiormente y defino el operador $^-$ como $\overline{a} = min\{x \in S / x \geq a\}$, entonces $^-$ es un operador de clausura de A.*

Remark

Por los dos teoremas anteriores, hay una correspondencia biunívoca entre los operadores de interior y/o clausura que posee un Álgebra de Boole y sus subreticulados acotados relativamente completos. Y si S es el subreticulado correspondiente al operador de Interior, $\neg S$ es el correspondiente al de clausura.

Theorem

Sea H un Álgebra de Heyting. Entonces existe un Álgebra de Boole Topológica $\langle B, ^\circ \rangle$ *tal que O(B) es isomorfa a H.*

Definition

Sean A un Álgebra de Boole Bitopológica, sea $a \in A$ y sea $i = 1, 2$. Diremos que a es "*abierto*" según la topología i si $a^{\circ_i} = a$. Notaremos $O_i(A) = \{a \in A \ / \ a^{\circ_i} = a\}$. Notemos que si A es *distinguida*, $O_1(A) \subseteq O_2(A)$.

Definition

En un Álgebra de Boole Bitopológica, para $i = 1, 2$ definimos las operaciones unarias "*clausura*" según la topología i, $^{-i}$como $\overline{a}^i = \neg\left((\neg a)^{\circ_i}\right)$. Notaremos $C_i(A) = \{a \in A \ / \ \overline{a}^i = a\}$.

Theorem

Sea A un Álgebra de Boole Bitopológica distinguida. Entonces:

1. $\overline{\overline{a}^1}^2 = \overline{a}^1$. *Esto implica que* $C_1(A) \subseteq C_2(A)$.
2. $a^{\circ_1} \leq a^{\circ_2}$
3. $\overline{a}^1 \geq \overline{a}^2$
4. $(a^{\circ_2})^{\circ_1} = a^{\circ_1}$
5. $\overline{\overline{a}^2}^1 = \overline{a}^1$

Remark

A partir de ahora, supondremos que todas las Álgebras de Boole Bitopológicas son distinguidas.

Ejemplos de Álgebras de Boole Bitopológicas

1. Sea A un Álgebra de Boole. $\circ_1 : A \to A$

$$\circ_1(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

   y $\circ_2 = Identidad_A$ son operadores de interior, tales que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, ^{\circ_1}, Id, 0, 1 \rangle$ es un Álgebra de Boole bitopológica distinguida.

2. Toda Álgebra de Boole Topológica es un Álgebra de Boole Bitopológica tomando $\circ_1 = \circ$ y $\circ_2 = Identidad$.
3. Si A es Álgebra de Boole Topológica, tomando $\circ_1 = \circ_2 = \circ$ resulta un Álgebra de Boole Bitopológica.

Definition

Sea A un Álgebra de Boole Bitopológica y sea $a \in A$. Diremos que a es "*abierto pseudoregular*" si $\left(\overline{a}^2\right)^{\circ_1} = a$. Notaremos $Preg(A)$ al conjunto de abiertos pseudoregulares de A.
$Preg(A) = \{a \in A / a = \left(\overline{a}^2\right)^{\circ_1}\}$.

Lemma

Sea A un Álgebra de Boole Bitopológica. Cuaquiera sea $a \in A$, $\left(\overline{a}^2\right)^{\circ_1}$ es abierto pseudoregular.

Theorem

Sea A un Álgebra de Boole Bitopológica. $Preg(A)$ con el orden heredado de A, resulta un Álgebra de Heyting. Los elementos distinguidos y las operaciones resultantes son: $0_{Preg(A)} = 0$, $1_{Preg(A)} = 1$, $a \vee_P b = \left(\overline{a \vee b}^2\right)^{\circ_1}$, $a \wedge_P b = a \wedge b$ y $a \rightarrow_P b = \left(\overline{\neg a \vee b}^2\right)^{\circ_1}$. Si además A es completa, $Preg(A)$ también lo es y valen $\left(\bigvee_P\right)_{i \in I} a_i = \left(\overline{\bigvee_{i \in I} a_i}^2\right)^{\circ_1}$ y $\left(\bigwedge_P\right)_{i \in I} a_i = \left(\overline{\bigwedge_{i \in I} a_i}^2\right)^{\circ_1}$.

Lemma

Sea $f : A_1 \to A_2$ *un morfismo de Álgebras bitopológicas y sea* $a \in A_1$*. Entonces* $f\left(\left(\overline{a}^2\right)^{\circ_1}\right) = \left(\overline{(f(a))}^2\right)^{\circ_1}$*.*

Remark

Si $f : A_1 \to A_2$ es un morfismo de Álgebras bitopológicas y $a \in Preg(A_1)$, entonces $f(a) \in Preg(A_2)$.

Lemma

Si $f : A_1 \to A_2$ *es un morfismo de Álgebras bitopológicas entonces*

$$\begin{aligned} Preg(f) : Preg(A_1) &\to Preg(A_2) \\ a &\to f(a) \end{aligned}$$

es un morfismo de Álgebras de Heyting.

Lemma

Sean $f : A_1 \to A_2$ *y* $g : A_2 \to A_3$ *morfismos de Álgebras bitopológicas. Entonces* $Preg(g \circ f) = Preg(g) \circ Preg(f)$*.*

Como consecuencia de los lemas anteriores, tenemos

Theorem

Sean ABBT y HEYT las categorías de Álgebras de Boole Bitopológicas y de Heyting con sus respectivos morfismos. Entonces

$$\begin{aligned} Preg : ABBT &\rightarrow HEYT \\ A &\rightarrow Preg(A) \\ f &\rightarrow Preg(f) \end{aligned}$$

es un funtor de categorías.

Una familia importante de ejemplos

Remark

Sean T_1 y T_2 dos topologías sobre un conjunto A tales que $T_1 \subseteq T_2$.
Para $i = 1, 2$, sean $\circ_i$ los operadores de interior sobre$P(A)$ que determinan las topologías T_i Entonces $(P(A); \circ_1; \circ_2)$, resulta un Álgebra de Boole Bitopológica distinguida, donde $0 = \emptyset$; $1 = A$; $\neg a = a^c$; $a_1 \wedge a_2 = a_1 \cap a_2$ y $a_1 \vee a_2 = a_1 \cup a_2$. Para simplificar, a veces la notaremos $(A; T_1; T_2)$ El conjunto de abiertos pseudoregulares $PReg(A)$ es un Álgebra de Heyting y como el conjunto de abiertos es cerrado por uniones arbitrarias, resulta un Álgebra de Heyting completa.

Definition

Dadas un Álgebra de Heyting H y $a \in H$ notamos
$X(H) = \{F/F$ es filtro primo de $H\}$ y
$\sigma(a) = \{F \in X(H) / a \in F\}$
Sobre $X(H)$, consideremos las siguientes 2 topologías:
T_S, que tiene como base a los conjuntos $\{\sigma(a)\}_{a \in H}$, "la topología de Stone" y
T_P, que tiene como base a los conjuntos $\{\sigma(a) \cap \sigma^c(b)\}_{a,b \in H}$, "la topología de Priestley".

Definition

Dada un Álgebra de Heyting H notamos $PReg_{_{SP}}(X(H))$, al Álgebra de Heyting de los abiertos pseudoregulares dadas por las topologías T_S y T_P sobre el conjunto $X(H)$.

Definition

Sea H Álgebra de Heyting y sea $D \subseteq H$. Decimos que D es denso en H, si S subálgebra de H y $D \subseteq S$ implica que $S = H$.

Definition

Sea H un Álgebra de Heyting y sea S subalgebra of H. Entonces S es $\bigvee -$*densa* en H (respectivamente $\bigwedge -$*densa* in H), si cada elemento de H es supremo de elementos de S (respectivamente, si cada elemento de H es ínfimo de elementos de S), es decir, si dado $h \in H$, existe una familia $\{s_i\}_{i \in I}$ de elementos de S tales que $h = \bigvee_{i \in I} s_i$ (respectivamente $h = \bigwedge_{i \in I} s_i$).

Definition

Una inmersión de Álgebras de Heyting, es un monomorfismo de Álgebras de Heyting.

Definition

Una inmersión de Álgebras de Heyting $j : H_1 \to H_2$ es *regular*, si dada una familia $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq H_1$ se verifican las siguientes dos condiciones:

I) Si existe $a = \bigvee_{i \in I} a_i \in H_1$, entonces existe $\bigvee_{i \in I} j(a_i) \in H_2$ y vale $j(a) = \bigvee_{i \in I} j(a_i)$.

II) Si existe $a = \bigwedge_{i \in I} a_i \in H_1$, entonces existe $\bigwedge_{i \in I} j(a_i) \in H_2$ y vale $j(a) = \bigwedge_{i \in I} j(a_i)$.

Definition

Una inmersión de Álgebras de Heyting $j : H_1 \to H_2$ es $\bigvee -densa$ (respectivamente $\bigwedge -dense$), si $Im(j)$ es subálgebra $\bigvee -densa$ ($\bigwedge -dense$) de H_2.

Theorem

Dada un Álgebra de Heyting H, $\sigma_{S,P} : H \to PReg_{SP}(X(H))$, $\sigma_{S,P}(a) = \{\sigma(a)\} = \{F \in X(H) / a \in F\}$ es una inmersión regular, $\bigvee -densa$ y $\bigwedge -densa$ en un Álgebra de Heyting completa.

Definition

Dados un conjunto parcialmente ordenado $(H; \subseteq)$ y $A \subseteq H$, sean $A^u = \{x \in H : (\forall a \in A), x \geq a\}$conjunto de cotas superiores de A, $A^l = \{x \in H : (\forall a \in A), x \leq a\}$conjunto de cotas inferiores de A y $DM(H) = \{A \subseteq H : A = A^{ul}\}$

Theorem

Dados un conjunto parcialmente ordenado $(H; \subseteq)$ *se verifica*
I) $(DM(H); \subseteq)$ *es un reticulado completo*
II) Si $(H; \subseteq)$ *es un Álgebra de Heyting,* $(DM(H); \subseteq)$ *también lo es*
III) Si $(H; \subseteq)$ *es un Álgebra de Boole,* $(DM(H); \subseteq)$ *también lo es*
IV) Si $(H; \subseteq)$ *es un Álgebra de Heyting,* $\varphi : H \to DM(H)\}$*,*
$\varphi(z) = z \downarrow = \{x \in H : x \leq z\}$ *es una inmersión regular y*
$\bigvee -$*densa de álgebras de Heyting*

Sea H un Álgebra de Heyting. Es conocido que, salvo isomorfismos, la completación de Dedekind-MacNeille de H; notada $DM(H)$, es la única que es regular, $\bigvee -$*densa* and $\bigwedge -$*densa*. Como corolario del Teorema anterior obtenemos el siguiente resultado:

Theorem

Sea H *un Álgebra de Heyting. Entonces* $PReg_{SP}\left(X\left(H\right)\right)$ *es isomorfo a* $DM(H)$*.*

Definition

Un *Hemimorfismo* entre las Álgebras de Boole A y B, es una función $h : A \to B$ que verifica las siguientes dos condiciones:

- $h(0) = 0$
- $h(a_1 \vee a_2) = h(a_1) \vee h(a_2)$ $\forall a_1$ y $a_2 \in A$.

Ejemplos: Los operadores de clausura y los cuantificadores existenciales sobre un Álgebra de Boole, son hemimorfismos de una Álgebra de Boole en si misma.

Definition

Un Espacio de Stone, es un espacio topológico compacto, Hausdorff y totalmente disconexo.

Definition

Sean Z e Y Espacios de Stone. $\varphi \subseteq Y \times Z$ es una *Relación Booleana*, si verifica las siguientes dos condiciones:

I) $(\forall y \in Y)$, $\varphi(\{y\})$ es un *conjunto cerrado* en Z.

II)$(\forall A \in clopen(Z))$, $\varphi^{-1}(A) \in clopen(Y)$.

Remark

Sean A y B Álgebras de Boole y sean $Z = X(A)$ e $Y = X(B)$ sus respectivos conjuntos de filtros primos. Si $h : A \to B$ es un hemimorfismo,

$\bigcap_{a\in A}\{(Q;P) \in (X(B) \times X(A)) : (a \notin P \;\; o \;\; h(a) \in Q)\}$ y $\{(Q;P) \in (X(B) \times X(A)) : (\forall a \in A)\, \chi_P(a) \leq \chi_Q(h(a))\}$ es el mismo conjunto y lo notamos h^*.

Theorem

Sea $h : A \to B$ un hemimorfismo entre Ágebras de Boole. Entonces $(Q;P) \in h^* \Leftrightarrow P \subseteq h^{-1}(Q) \Leftrightarrow h(P) \subseteq Q$.

Definition

Si $h : A \to B$ es un hemimorfismo, decimos que h^* es la relación adjunta de h.

Theorem

Si $h : A \to B$ es un hemimorfismo entre Ágebras de Boole, su relación adjunta $h^* \subseteq (X(B) \times X(A))$ es booleana.

Definition

Sea $\varphi \subseteq Y \times Z$ una *Relación Booleana* entre espacios de Stone. Defino

$$\begin{aligned} {}^*\varphi : Clopen(Z) &\to Clopen(Y) \\ A &\to \varphi^{-1}(A) \end{aligned}$$

Theorem

${}^*\varphi$ es un hemimorfismo entre Ágebras de Boole

Theorem

Sean A un Álgebra de Boole Topológica y $^{-}$ su operador de clausura. Sean $^{-*}$ la relación booleana correspondiente al hemimorfismo $^{-}$ y $^{*}(-^{*})$ el hemimorfismo correspondiente a dicha relación. Entonces $^{*}(-^{*})$ es un operador de clausura en $Clopen\,(X(A))$.

Corollary

Sea A un Álgebra de Boole Topológica. Si a $Clopen(X(A))$ le incorporamos el operador de clausura $^{*}(-^{*})$,

$$\sigma : A \to Clopen(X(A))$$
$$a \to \sigma(a)$$

es un isomorfismo de Álgebras topológicas.

Definition

Sea $h : A \to A$ un hemimorfismo entre Álgebras de Boole. Entonces:

- h es *monótonamente creciente*, si $(\forall a \in A)\ a \leq h(a)$.
- h es *derivativo*, si $(\forall a \in A)$, $h\,(h\,(a)) \leq h(a)$.

Remark

Un hemimorfismo h entre Álgebras de Boole es un operador de clausura si y sólo si es *monótonamente creciente* y derivativo.

Theorem

Sea $h : A \to A$ un hemimorfismo entre Álgebras de Boole. Entonces:

1. h es *monótonamente creciente*, si y sólo si h^* es reflexiva.
2. h es *derivativo*, si y sólo si h^* es transitiva.

Definition

Sean $f : (A,^{-1}) \to (B,^{-2})$ un morfismo de Álgebras Topológicas, donde $^{-1}$ y $^{-2}$ son los operadores de clausura, correspondientes y $g : (Z; R_Z) \to (Y; R_Y)$ una función continua entre Espacios de Stone, donde R_Z es una relación booleana, reflexiva y transitiva en Z y análogamente R_Y en Y. Entonces notaremos

- $$\begin{aligned} f^\star : X(B) &\to X(A) \\ P &\to f^{-1}(P) \end{aligned}$$

  Se verifica que $f^\star$ es una función continua entre los Espacios de Stone asociados a B y A.

- $$\begin{aligned} {}^\star g : Clopen(Y) &\to Clopen(Z) \\ A &\to g^{-1}(A) \end{aligned}$$

  Es fácil ver que ${}^\star g$ es un morfismo booleano.

Definition

Llamaremos STONT a la categoría cuyos objetos son pares (Z, R_Z), donde Z es un Espacio Topológico de Stone, R_Z es una relación Booleana, transitiva y reflexiva y cuyas flechas $g : Z \to Y$ son funciones continuas compatibles con dicha relación (o sea $(z_1; z_2) \in R_Z \Rightarrow (g\,(z_1)\,; g\,(z_2)) \in R_Z$), que verifican la siguiente condición adicional: si $g : (Z; R_Z) \to (Y; R_Y)$ es una función entre objetos de Stont y $(g\,(z_1)\,; y_2) \in R_Y$, entonces existe $z_2 \in Z$ tal que $(z_1; z_2) \in R_Z$ y $g(z_2) = y_2$.

Lemma

Sean Z un Espacio de Stone y $\varphi \subseteq Z \times Z$ una relación Booleana, Reflexiva y Transitiva. Entonces ${}^*\varphi$ es un operador de clausura en $Clopen(Z)$.

Corollary

Si $g : (Z; R_Z) \to (Y; R_Y)$ es una flecha de STONT, entonces $G(g) = g^{-1} : (CLOPEN\,(Y)\,;\ {}^*R_Y) \to (CLOPEN\,(Z)\,;\ {}^*R_Z)$ es una flecha de ABT, donde ABT es la categoría de Álgebras de Boole Topológicas y sus morfismos.

Definition

Definimos el funtor contravariante $G : STONT \rightarrow ABT$, de la siguiente manera: Si $(Z; R_Z)$ es un objeto de STONT, $G\left((Z; R_Z)\right) = \left(CLOPEN\left(Z\right);\ {}^{*}R_Z\right)$. Si $g : (Z; R_Z) \rightarrow (Y; R_Y)$ es una flecha de STONT, entonces definimos $G(g) = g^{-1} : \left(CLOPEN\left(Y\right);\ {}^{*}R_Y\right) \rightarrow \left(CLOPEN\left(Z\right);\ {}^{*}R_Z\right)$.

Theorem

Sea $f : (A, {}^{-_1}) \rightarrow (B, {}^{-_2})$ un morfismo de Álgebras Topológicas, donde ${}^{-_1}$ y ${}^{-_2}$ son los operadores de clausura correspondientes y sean $X(A)$ y $X(B)$ sus espacios de filtros primos con la topología de Stone. Entonces $\mathcal{F}(f) = f^{-1} : \left(X\left(B\right); \left({}^{-_2}\right)^{*}\right) \rightarrow \left(X\left(A\right); \left({}^{-_1}\right)^{*}\right)$ es una flecha en la categoría $STONT$.

Definition

Definimos el funtor contravariante $\mathcal{F} : ABT \rightarrow STONT$ de la siguiente manera: Si $(A,^{-})$ es un álgebra topológica, $\mathcal{F}(A,^{-}) = \left(X\left(A\right); \left(^{-}\right)^{*}\right)$. Si $f : (A,^{-_1}) \rightarrow (B,^{-_2})$ es un morfismo de Álgebras Topológicas, donde $^{-_1}$ y $^{-_2}$ son los operadores de clausura correspondientes, $\mathcal{F}(f) = f^{-1} : \left(X\left(B\right); \left(^{-_2}\right)^{*}\right) \rightarrow \left(X\left(A\right); \left(^{-_1}\right)^{*}\right)$.

Theorem

Los funtores contravariantes $\mathcal{F} : ABT \rightarrow STONT$ y $G : STONT \rightarrow ABT$, definen una equivalencia categórica entre ABT y $STONT$.

Definition

Llamaremos STONTB a la categoría cuyos objetos son triples $(Z; R_Z^1; R_Z^2)$, donde Z es un Espacio Topológico de Stone y R_Z^i son relaciones Booleanas, transitivas y reflexivas si $i = 1, 2$ tales que $R_Z^1 \supseteq R_Z^2$. Sus flechas $g : Z \to Y$ son funciones continuas compatibles con dichas relaciones (o sea $(z_1; z_2) \in R_Z^i \Rightarrow (g(z_1); g(z_2)) \in R_Y^i$), que verifican la siguiente condición adicional: si $g : (Z; R_Z^1; R_Z^2) \to (Y; R_Y^1; R_Y^2)$ es una función entre objetos de STONTB y $(g(z_1); y_2) \in R_Y^i$, entonces existe $z_2 \in Z$ tal que $(z_1; z_2) \in R_Z^i$ y $g(z_2) = y_2$.

Definition

Definimos los funtores $\mathcal{F}^{\mathcal{B}} : ABBT \to STONTB$ y $G^B : STONTB \to ABBT$ de la siguiente manera: Si $\langle A, ^{-1}, ^{-2} \rangle$ es un Álgebra de Boole Bitopológica, $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}(\langle A, ^{-1}, ^{-2} \rangle) = \left(X\left(A\right); \left(^{-1}\right)^{*}; \left(^{-2}\right)^{*}\right)$. Si $f : \langle A, ^{-1}, ^{-2} \rangle \to \langle B, ^{-1}, ^{-2} \rangle$ es un morfismo de Álgebras Bitopológicas, $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}(f) = f^{-1} : \left(X\left(B\right); \left(^{-1}\right)^{*}; \left(^{-2}\right)^{*}\right) \to \left(X\left(A\right); \left(^{-1}\right)^{*}; \left(^{-2}\right)^{*}\right)$. Recíprocamente, si $(Z; R_Z^1; R_Z^2)$ es un objeto de STONTB, definimos $G^B(Z; R_Z^1; R_Z^2) = \left(CLOPEN\left(Z\right);\ ^{*}R_Z^1;\ ^{*}R_Z^2\right)$. Y si $g : (Z; R_Z^1; R_Z^2) \to (Y; R_Y^1; R_Y^2)$ es una flecha entre objetos de STONTB, $G^B(g) = g^{-1} : \left(CLOPEN\left(Y\right);\ ^{*}R_Y^1;\ ^{*}R_Y^2\right) \to \left(CLOPEN\left(Z\right);\ ^{*}R_Z^1;\ ^{*}R_Z^2\right)$.

Remark

Los funtores $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}$ y G^B, determinan una equivalencia categórica entre STONTB y ABBT.

Bibliografía

1. Bezhanishvili G., Bezhanishvili N., Gabelaia D. and Kurz A., Bitopological duality for distributive lattices and Heyting Algebras, Mathematical Structures in Computer Science, 1-32,(2010).

2. Naturman, Colin and Rose, Henry. Interior Álgebras: Some Universal Algebraic aspects. J. Korean Math. Soc. 30(1993), Nº 1 pp 1-23.

3. R. Goldblatt, Varieties of Complex algebras, Ann. Pure Appl. logic. 44 (1989), pp173-242. North-Holland.

4. MacKinsey-Tarski, The algebra of topology. Ann. of Math.45 (1944), 141-191.

5. Scirica, Carlos and Petrovich Alejandro. A Topological Characterization of the Dedekind-MacNeille Completion of Heyting Algebras. Actas del XIII Congreso Monteiro (2015). 2016, pp.101-109.

6. Scirica, Carlos. Una generalización algebraica de Espacios Topológicos y Bitopológicos. Comunicación presentada en la LXV Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca (2016).

7. F. B. Wright, Some remarks on Boolean duality, Portugal. Math. 16(1957), pp 109-117.