Definibilidad por fórmulas abiertas en estructuras relacionales

Carlos Areces Miguel Campercholi Pablo Ventura

FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba

6 de junio de 2017

El problema de definibilidad

OpenDef: toma como input una estructura relacional finita $\boldsymbol{A}$ y una relación T sobre el dominio de $\boldsymbol{A}$ y decide si T es abierta definible en $\boldsymbol{A}$.

El lema semántico

Teorema ((Campercholi,Vaggione 2016)

Sea $\boldsymbol{A}$ una estructura relacional finita y $T \subseteq A^k$. Son equivalentes:

I) *T es abierta definible en $\boldsymbol{A}$.*

II) *T es preservada por todos los isomorfismos entre subestructuras de $\boldsymbol{A}$.*

El lema semántico

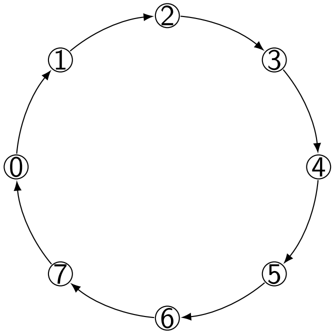
Teorema ((Campercholi,Vaggione 2016)

Sea $\boldsymbol{A}$ una estructura relacional finita y $T \subseteq A^k$. Son equivalentes:

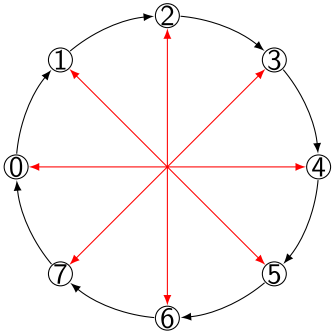
- I) *T es abierta definible en $\boldsymbol{A}$.*
- II) *T es preservada por todos los isomorfismos entre subestructuras de $\boldsymbol{A}$.*

$\mathrm{subIso}(\boldsymbol{A})$ = conjunto de isomorfismos entre subestructuras de $\boldsymbol{A}$.

Tomemos el grafo dirigido C_8

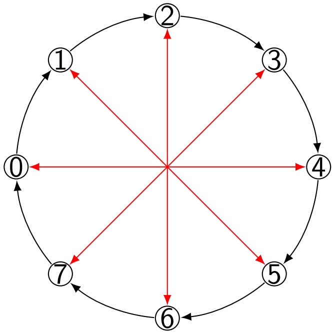


Tomemos el grafo dirigido C_8



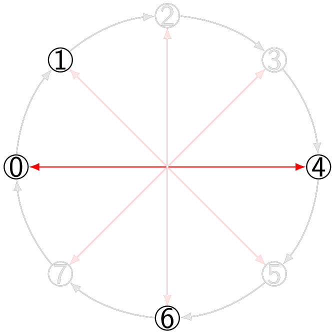
- T será la relación target "estar al frente".

Tomemos el grafo dirigido C_8



- T será la relación target "estar al frente".
- ¿T es abierta definible en C_8?

Tomemos el grafo dirigido C_8



- T será la relación target "estar al frente".
- ¿T es abierta definible en C_8?
- **No**, $0 \mapsto 1, 4 \mapsto 6$ es un iso que **no preserva** T

Teorema

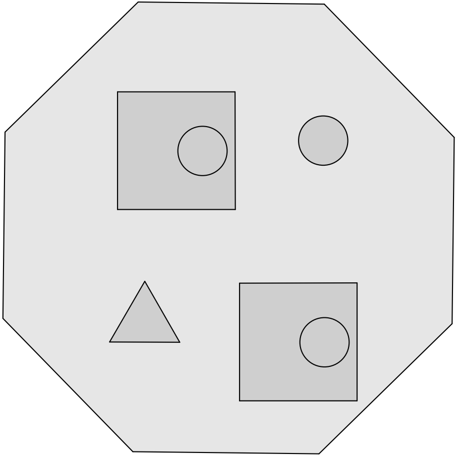
Sea $\boldsymbol{A}$ *una estructura relacional finita. Supongamos* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{S}(\boldsymbol{A})$ *y* $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{subIso} \boldsymbol{A}$ *tales que:*

I) *no hay miembros isomorfos en* $\mathcal{S}$,
II) $\operatorname{aut} \boldsymbol{B} \subseteq \mathcal{F}$ *para todo* $\boldsymbol{B} \in \mathcal{S}$, *y*
III) *para cada* $\boldsymbol{C} \in \mathbb{S}(\boldsymbol{A}) \setminus \mathcal{S}$ *hay* $\boldsymbol{C}' \in \mathcal{S}$ *y* $\rho, \rho^{-1} \in \mathcal{F}$ *tal que* $\rho : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}'$ *es un un isomorfismo.*

Luego, cada $\gamma \in \operatorname{subIso} \boldsymbol{A}$ *es una composición de funciones en* $\mathcal{F}$.

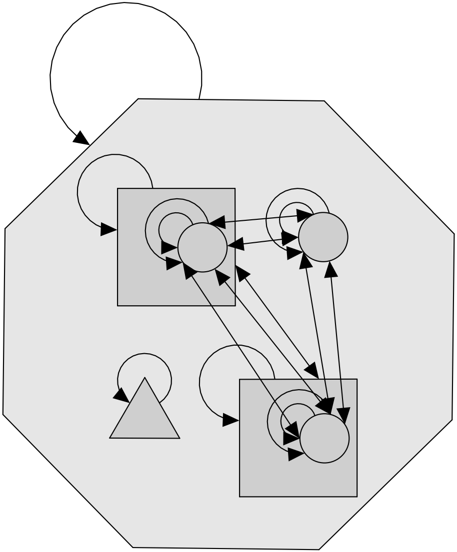
Esquematizando la idea

Supongamos que queremos definir una relación T en:



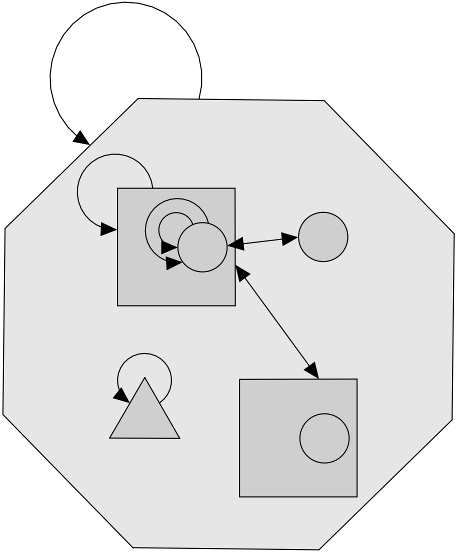
Esquematizando la idea

Deberíamos revisar todos estos morfismos:



Esquematizando la idea

Pero revisando solo el conjunto generador:



Definición

Sea T un conjunto de tuplas definimos el *espectro* de T como

$$\operatorname{spec} T := \{|\{a_1, \ldots, a_n\}| : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in T\}.$$

Definición

Sea T un conjunto de tuplas definimos el *espectro* de T como

$$\text{spec}\, T := \{ |\{a_1, \ldots, a_n\}| : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in T \}.$$

Por ejemplo, para una R ternaria:

$$R = \{ (1,2,3), (1,3,3), (3,2,1) \}$$

Definición

Sea T un conjunto de tuplas definimos el *espectro* de T como

$$\operatorname{spec} T := \{|\{a_1, \ldots, a_n\}| : \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in T\}.$$

Por ejemplo, para una R ternaria:

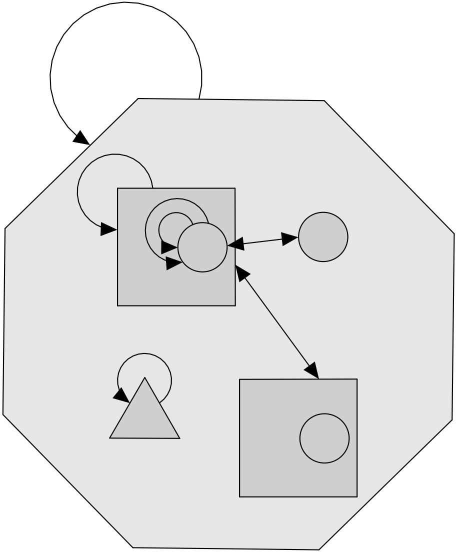
$$R = \{ \underbrace{(1,2,3)}_{3}, \underbrace{(1,3,3)}_{2}, \underbrace{(3,2,1)}_{2} \}$$

$$\operatorname{spec} R = \{3, 2\}$$

Corolario

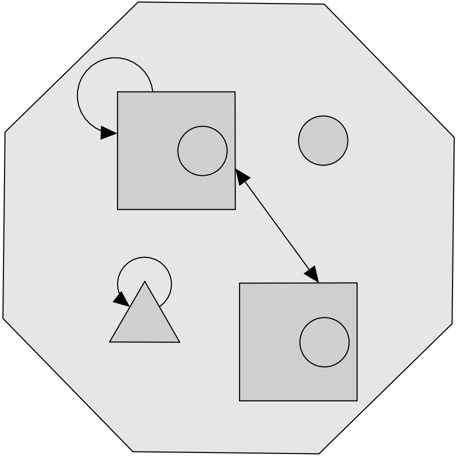
Sea $\boldsymbol{A}$ *una estructura finita relacional y* $T \subseteq A^n$*. Supongamos* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{F}$ *como en el teorema anterior, y sea* $\mathcal{F}' := \{\gamma \in \mathcal{F} : |\mathrm{dom}\,\gamma| \in \mathrm{spec}\,T\}$*. Luego* T *es abierta definible en* $\boldsymbol{A}$ *sii* T *es preservada por todos los subisos en* $\mathcal{F}'$*.*

Gracias al conjunto generador, teníamos:



Siguiendo con el esquema:

Y ahora gracias al espectro:



Algoritmo

Definimos el árbol $\mathrm{Tr}^{\boldsymbol{A}}$ tal que su raíz es $\boldsymbol{A}$ y para cada nodo $\boldsymbol{B}$ en el árbol, sus hijos son las subestructuras estrictas de tamaño inmediato menor al de $\boldsymbol{A}$ en spec T.

Definimos el árbol $\mathrm{Tr}^{\boldsymbol{A}}$ tal que su raíz es $\boldsymbol{A}$ y para cada nodo $\boldsymbol{B}$ en el árbol, sus hijos son las subestructuras estrictas de tamaño inmediato menor al de $\boldsymbol{A}$ en spec T.
Luego los nodos se recorren con DFS y para cada nodo $\boldsymbol{B}$ se hace lo siguiente:

- Revisar si hay $\gamma : \boldsymbol{B}_{\mathcal{R}} \to \boldsymbol{S}_{\mathcal{R}}$ para algún $\boldsymbol{S} \in \mathcal{S}$;
  1. Si no lo hay, revisar por si los automorfismos de $\boldsymbol{B}$ preservan $T^{\boldsymbol{B}}$. Si alguno no preserva, retornar False. Si todos preservan, agregar $\boldsymbol{B}$ a $\mathcal{S}$ y continuar con un hijo de $\boldsymbol{B}$.
  2. Si hay un iso γ, revisar si γ y γ^{-1} preservan T. Si alguno no preserva, retornar False. De otra forma, continuar con un hermano de $\boldsymbol{B}$.

Si el algoritmo llega a recorrer todos los nodos retorna True.

Complejidad de OpenDef

Teorema

OpenDef *es* coNP*-completo.*

Complejidad de OpenDef

Teorema

$\neg$OpenDef *es* NP.

Complejidad de OpenDef

Teorema

$\neg$OpenDef *es* NP.

Demostración.

- Tomamos como certificado un subiso, polinomial.
- Chequear que no preserva T es polinomial.

$\square$

Teorema

$\neg\mathrm{OpenDef}$ *es* NP-*hard.*

Teorema

$\neg$OpenDef *es* NP-*hard.*

Usaremos:

InducedPath: toma un grafo finito $\boldsymbol{G}$ y un entero positivo k t decide si $\boldsymbol{G}$ tiene un camino de largo k como un subrafo inducido (i.e. submodelo)

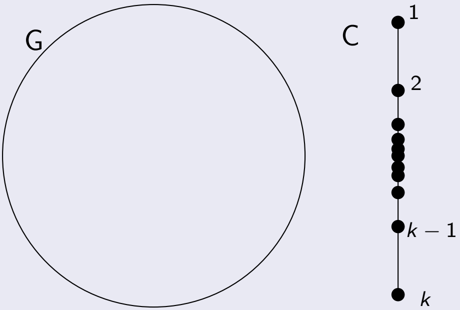
Teorema

InducedPath *es* NP-*completo.*

Demostración.

Veremos que InducedPath se reduce a $\neg$OpenDef.

Fijamos $\boldsymbol{G}$ y k. Sea C una cadena de largo k, tomamos G' la union disjunta de G y C.



Sea $T = \{(1, \ldots, k), (k, \ldots, 1)\}$ la relación a definir.

Si no es definible, hay una subestructura isomorfa a C en G. (i.e. un camino de largo k) $\square$

Trabajo futuro

- Generación de fórmulas.
- Complejidad de generar la fórmula.

¿Preguntas?