L_n^2–algebras

Carlos Gallardo, Alicia Ziliani

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur,
8000 Bahía Blanca, Argentina

En este trabajo investigamos la variedad $\mathcal{L}_n^2$ constituida por las álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n considerando $m = 2$. Es decir, las L_n^2–álgebras en las cuales $f^4 x = x$. En primer lugar, mostraremos propiedades de los átomos que serán de gran utilidad para describir detalladamente a las álgebras simples de $\mathcal{L}_n^2$. Más precisamente, hallamos el número de L_n^2–álgebras simples y su cardinal.

Definición

Un álgebra de Łukasiewicz n–valuada (o L_n–álgebra), n entero, $n \geq 2$, es un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \sim, \{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, \{1\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}, 0, 0)$ donde el reducto $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan y $\{s_i\}_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ es una familia de operadores unarios sobre L que satisfacen las siguientes condiciones:

(L1) $s_i(x \vee y) = s_i x \vee s_i y$,

(L2) $s_i x \vee \sim s_i x = 1$,

(L3) $s_i(s_j(x)) = s_j(x)$,

(L4) $s_i(\sim x) = \sim s_{n-i} x$,

(L5) $s_1 x \leq s_2 x \leq \ldots \leq s_{n-1} x$,

(L6) *si* $s_i x = s_i y$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n-1$, *entonces* $x = y$.

En toda L_n–álgebra valen las siguientes propiedades:

(L7) $s_i(x \wedge y) = s_i x \wedge s_i y$,

(L8) $s_i x \wedge \sim s_i x = 0$,

(L9) $x \leq y$ si, y sólo si, $s_i x \leq s_i y$, para todo i, $1 \leq i \leq n-1$.

R. Cignoli demostró que las álgebras de Łukasiewicz n–valuadas se pueden caracterizar mediante $(L3)$, $(L4)$, $(L5)$, $(L7)$, $(L8)$ y $(L9)$.

Además, se verifican las siguientes propiedades:

(L10) $x \leq s_{n-i}x$,

(L11) $s_1 x \leq x$,

(L12) $s_i 1 = 1$ y $s_i 0 = 0$ para todo i, $1 \leq i \leq n-1$,

(L13) $\sim x \vee s_{n-i}x = 1$,

(L14) $x \wedge \sim s_i x \wedge s_{i+1}x \leq y$, $1 \leq i \leq n-1$.

Luego el mismo autor obtuvo, a partir de $(L1)$, $(L2)$, $(L3)$, $(L4)$, $(L5)$, $(L10)$ y $(L14)$, una caracterización ecuacional de las álgebras de Łukasiewicz n–valuadas.

Es bien sabido que un ejemplo importante de estas álgebras es la cadena de n fracciones racionales $C_n = \{\frac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\}$ con la estructura natural de retículos y las operaciones unarias $\sim$ y s_i, definidas por las prescripciones siguientes:

- $\sim(\frac{j}{n-1}) = 1 - \frac{j}{n-1}$ y
- $s_i(\frac{j}{n-1}) = 0$ si $i + j < n$ o $s_i(\frac{j}{n-1}) = 1$ en otro caso.

La importancia del mismo es consecuencia de la siguiente afirmación:

Teorema

Sea A una L_n–álgebra no trivial. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *A es subdirectamente irreducible,*

(ii) *A es simple,*

(iii) *A es isomorfa a una subálgebra de C_n.*

Como la álgebras de Łukasiewicz de orden n tienen un reducto que es un álgebra De Morgan, T. Almada y J. Vaz de Carvalho las generalizaron considerando álgebras del mismo tipo que tienen un reducto en $\mathcal{K}_{m,0}$. Entonces, introdujeron la variedad $\mathcal{L}_n^m$ de la álgebras de Łukasiewicz m–generalizadas de orden n que se definen de la siguiente manera:

Definición

Un álgebra de Łukasiewicz m–generalizada de orden n (o L_n^m–algebra) es un álgebra $\langle A, \vee, \wedge, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ tal que se verifican las siguientes condiciones:

(GL_1) $\langle L, \vee, \wedge, f, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo acotado, f es un endomorfismo dual tal que $f^{2m}x = x$, (es decir, $\langle L, \vee, \wedge, f, 0, 1\rangle \in \mathcal{K}_{m,0}$),

(GL_2) $D_i(x \wedge \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y) = D_i x \wedge D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_3) $D_i x \wedge D_j x = D_j x,\ 1 \leq i \leq j \leq n-1,$

(GL_4) $D_i x \vee f D_i x = 1,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_5) $D_i f \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x = f D_{n-i} \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_6) $D_i D_j x = D_j x,\ 1 \leq i, j \leq n-1,$

(GL_7) $x \vee D_1 x = D_1 x,$

(GL_8) $D_i x = D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x,\ 1 \leq i \leq n-1,$

(GL_9) $(x \wedge fx) \vee y \vee fy = y \vee fy,$

(GL_{10}) $\bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x \leq \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y \vee f D_i \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}y \vee D_{i+1} \bigvee_{p=0}^{m-1} f^{2p}x,$ $1 \leq i \leq n-2.$

Proposición

Sea $L \in \mathcal{L}_m^n$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(GL_{11}) $S(L) = \{x \in L : f^2x = x\}$ *es uns sub-álgebra de* L *y es la mayor sub-álgebra de* L *que pertenece a la variedad de las* L_n*–álgebra. Teniendo en cuenta* $\overline{x} = \bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p}x$*, tenemos que* $S(L) = \{x \in L : \overline{x} = x\}$.

(GL_{12})

- (i) $x \leq y$ *implica* $D_i x \leq D_i y$, $1 \leq i \leq n-1$,
- (ii) $D_j f D_i x = f D_i x$, $1 \leq i, j \leq n-1$,
- (iii) $f D_i x$ *es el complemento Booleano de* $D_i x$, $1 \leq i \leq n-1$,
- (iv) $D_i x \leq D_i y$ *si, y sólo si,* $f D_i x \vee D_i y = 1$, $1 \leq i \leq n-1$,
- (v) $D_j(D_i x \wedge D_i y) = D_i x \wedge D_i y$, $1 \leq i, j \leq n-1$,

(vi) $x \wedge fD_1x = 0$,

(vii) $(fD_ix \wedge fD_iy) \vee (D_ix \wedge D_iy) = (D_ix \vee fD_iy) \wedge (D_iy \vee fD_ix)$, $1 \leq i \leq n-1$,

(viii) $z \in S(L)$ implies that $D_i(x \wedge z) = D_ix \wedge D_iz$, $1 \leq i \leq n-1$.

(GL_{13}) Sea $z \in L$ y $1 \leq s \leq m$, considerando los elementos $q_sz = \bigwedge\limits_{\substack{J \subseteq T \\ |J| = s}} \bigvee\limits_{j \in J} f^{2j}z$, donde $T = \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Entonces:

(i) $f^2 q_s z = q_s z$, $1 \leq s \leq m$,

(ii) $q_s z \leq q_{s+1} z$, $1 \leq s \leq m-1$,

(iii) $q_1 z = \bigwedge\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p} z$ y $\bigvee\limits_{p=0}^{m-1} f^{2p} z = q_m z$,

(iv) $z \in S(L)$ implica $q_s z = z$, $1 \leq s \leq m$,

(v) $x \leq z$ implica $q_s x \leq q_s z$, $1 \leq s \leq m$, $x \in L$,

(vi) $x, y \in L$ $q_s(x \wedge y) = q_s(x \vee y)$ para todo s, $1 \leq s \leq m$ implica $x = y$.

Por otra parte, con el propósito de obtener una caracterización de las congruencias a partir de sistemas deductivos, introducimos una operación binaria $\rightarrow$ sobre las L_n^m–álgebras, llamada implicación débil, como sigue: $x \rightarrow y = D_1 f x \vee y$.

Al conjunto de los sistemas deductivos de L lo notaremos con $\mathcal{D}(L)$.

A continuación indicaremos algunos resultados válidos en toda L_n^m–álgebra y necesarios para el desarrollo posterior.

(T1) Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$, entonces se verifican:

- $Con(L) = \{R(F) : F \in \mathcal{D}(L)\}$ donde $R(F) = \{(x,y) \in L^2 :$ existe $w \in F$ tal que $D_{n-1}w \to fx = D_{n-1}w \to fy\}$,
- el retículo $Con(A)$ y $\mathcal{D}(A)$ son isomorfismos, consirando las aplicaciones $\theta \longmapsto [1]_\theta$ y $F \longmapsto R(F)$ son una inversa de la otra.

(T2) Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- L es subdirectamente irreducible,
- $S(L)$ es una subálgebra de C_n,
- L es simple.

(T3) Si L es subdirectlamente irreducible, entonces L is finita.

(T4) $\mathcal{L}_n^m$ es semisimple y localmente finita.

(T5) $\mathcal{L}_n^m$ es discriminadora.

(T6) Sea L una L_n^m-álgebra finita y $a \in L$, $a \neq 0$. Entonces $H = [a)$ es un sistema deductivo maximal si, y sólo si $a \in$ es un átomo de $B(S(L))$.

Definición

Una L_n^2–algebra es un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ *tal que*

(GL_1) $\langle L, \vee, \wedge, f, 0, 1\rangle \in \mathcal{K}_{2,0}$,

(GL_2) $D_i(x \wedge (y \vee f^2 y)) = D_i x \wedge D_i y$, $1 \leq i \leq n-1$,

(GL_3) $D_i x \wedge D_j x = D_j x$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$,

(GL_4) $D_i x \vee f\, D_i x = 1$, $1 \leq i \leq n-1$,

(GL_5) $D_i f(x \vee f^2 x) = f D_{n-i}\, x$, $1 \leq i \leq n-1$,

(GL_6) $D_i D_j x = D_j x$, $1 \leq i, j \leq n-1$,

(GL_7) $x \vee D_1 x = D_1 x$,

(GL_8) $D_i x = D_i(x \vee f^2 x)$, $1 \leq i \leq n-1$,

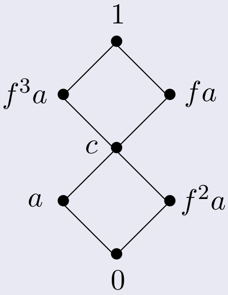
(GL_9) $(x \wedge fx) \vee y \vee fy = y \vee fy$,

(GL_{10}) $(x \vee f^2 x) \leq (y \vee f^2 y) \vee f D_i y \vee D_{i+1}\, x$, $1 \leq i \leq n-2$.

En el ejemplo que damos a continuación exibimos la L_n^2-álgebra más simple para ilustrar que estas álgebras no coinciden con las L_n-álgebras.

Ejemplo

Consideremos la siguiente L_3^2–algebra:



x	D_1x	D_2x
0	0	0
a	1	0
f^2a	1	0
c	1	0
fa	1	1
f^3a	1	1
1	1	1

Observemos que los operadores D_i no son $\wedge$–homomorfismos, ya que $D_1(a \wedge f^2 a) = D_1 0 = 0 \neq 1 = D_1 a \wedge D_1 f^2 a$.

A continuación mostraremos algunas propiedades de los átomos en las L_n^2-álgebras, que serárn de gran utilidad para describir las álgebras simples de esta variedad.

Definición

Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$ y $x \in L$. Diremos que x es un átomo de L si para todo $y \in L$ tal que $0 \leq y \leq x$ implica que $y = 0$ o $y = x$.

Al conjunto de los átomos de L lo notaremos con $\mathcal{A}t(L)$.

Proposición

Sea $L \in \mathcal{L}_n^2$. Si x es átomo de L, entonces $f^2 x \in \mathcal{A}t(L)$.

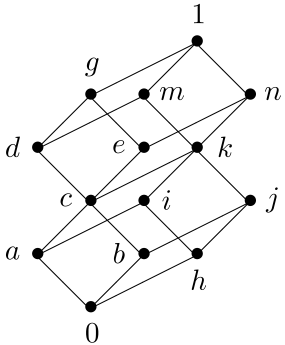
Más generalmente.

Corolario

Sea $L \in \mathcal{L}_n^m$*. Si* x *es átomo de* L*, entonces* $f^{2p}x \in \mathcal{A}t(L)$*,* $0 \leq p \leq m-1$*.*

Ejemplo

Consideremos la L_3^2*–álgebra* L *cuyo diagrama de Hasse es el indicado en la figura y donde las operaciones* f *y* D_i*,* $1 \leq i \leq 2$*, están definidas en la siguiente tabla:*



x	0	a	b	c	d	e	g	h	i	j	k	m	n	1
fx	1	n	m	k	i	j	h	g	e	d	c	a	b	0
D_1x	0	g	g	g	g	g	g	h	1	1	1	1	1	1
D_2x	0	0	0	0	g	g	g	h	h	h	h	1	1	1

Observemos que $\mathcal{A}t(L) = \{a, b, h\}$ y además $h = f^2h$.

Proposición

Sea L una L_n^2–álgebra simple. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) *si existe $x \in \mathcal{A}t(L) \setminus S(L)$, entonces $\mid \mathcal{A}t(L) \mid = 2$,*

(ii) *si existe $x \in \mathcal{A}t(L) \cap S(L)$, entonces $\mid \mathcal{A}t(L) \mid = 1$.*

Proposición

Sea L una L_n^2–álgebra simple y $a, b \in L$ tales que $[a, b] \cap S(L) = \{a, b\}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(R1) $|[a, b]| = 2$ *o* $|[a, b]| = 4$,

(R2) $|[a, b]| = 2$ *si, y sólo si,* $|[fb, fa]| = 2$,

(R3) $|[a, b]| = 4$ *si, y sólo si,* $|[fb, fa]| = 4$.

Luego, los resultados anteriores nos permitieron determinar el cardinal de las L_n^2–álgebras simples del siguiente modo:

Teorema

Sea L una L_n^2–álgebra simple. Entonces

- *si n impar para cada j, $2 \leq j \leq n$, $|L| = j + 4t$ donde $0 \leq t \leq \frac{j-1}{2}$ si j es impar o $0 \leq t \leq \frac{j-2}{2}$ si j es par,*
- *si n es par para cada j, $1 \leq j \leq n/2$, $|L| = 2j + 4t$ donde $0 \leq t \leq j - 1$.*

A continuación,nos ocuparemos de calcular el número de álgebras simples no isomorfas de esta variedad. Los resultados anteriores nos permitieron hallar el diagrama de Hasse de ellas, el cual se obtiene a partir de las subálgebras de C_n y la distribución de un número par de rombos.

Teorema

Las L_n^2–álgebras simples no isomorfas pueden clasificarse en los siguientes tipos:

- I : *las subálgebras de C_n,*
- II : *las subálgebras de C_n con cardinalidad impar que tengan un número par de rombos que verifican $R2$ y $R3$,*
- III : *las subálgebras de C_n con cardinalidad par que tengan un número par de rombos que verifican $R2$ y $R3$.*

Entonces se verifica que

- para n impar,

$$|Tipo\, I| = 2^{\frac{n-1}{2}},$$

$$|Tipo\, II| = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j-1} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right),$$

$$|Tipo\, III| = \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right),$$

- para n par,

$$|Tipo\, I| = 2^{\frac{n-2}{2}}, \qquad |Tipo\, II| = 0,$$

$$|Tipo\, III| = \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\binom{(n-2)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right).$$

Por lo tanto obtenemos:

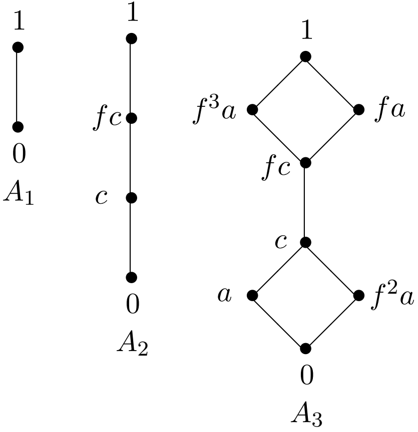
Teorema

En $\mathcal{L}_n^2$ el número de álgebras simples no isomorfas es:

- $$2^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j-1} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right) + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \left(\binom{(n-3)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right),$$ *si n es impar,*
- $$2^{\frac{n-2}{2}} + \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\binom{(n-2)/2}{j} \sum_{t=1}^{j} \binom{j}{t} \right),$$ *si n es par.*

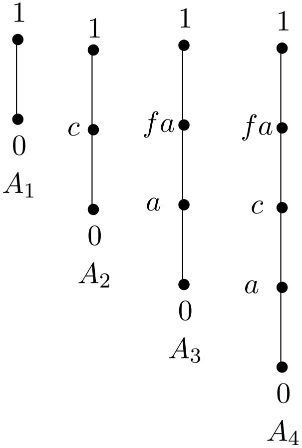
Las L_4^2–álgebras simples no isomorfas son las siguientes:

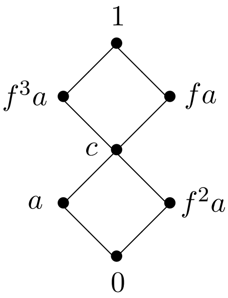
x	D_1x	D_2x	D_3x
0	0	0	0
a	1	0	0
f^2a	1	0	0
c	1	0	0
fc	1	1	0
f^3a	1	1	1
fa	1	1	1
1	1	1	1



Las L_5^2–álgebras simples no isomorfas son las siguientes:

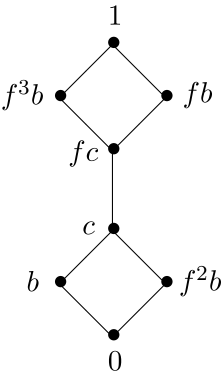
x	D_1x	D_2x	D_3x	D_4x
0	0	0	0	0
a	1	0	0	0
c	1	1	0	0
fa	1	1	1	0
1	1	1	1	1



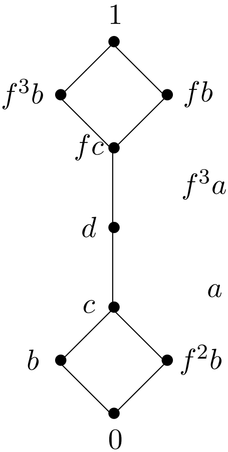


A_5

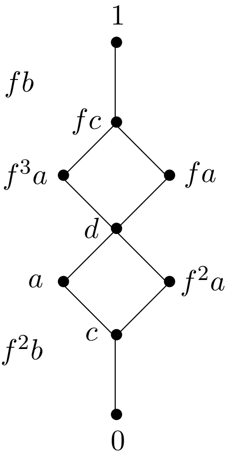
x	D_1x	D_2x
0	0	0
a	1	0
f^2a	1	0
c	1	0
fa	1	1
f^3a	1	1
1	1	1


1
f^3b
fb
fc
c
b
f^2b
0

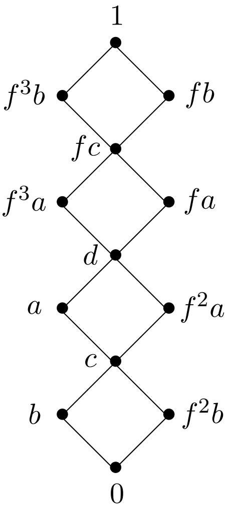
A_6


1
f^3b
fb
fc
d
c
b
f^2b
0

A_7


1
fc
f^3a
fa
d
a
f^2a
c
0

A_8


1
f^3b
fb
fc
f^3a
fa
d
a
f^2a
c
b
f^2b
0

A_9

x	0	b	f^2b	c	a	f^2a	d	f^3a	fa	fc	f^3b	fb	1
D_1x	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D_2x	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D_3x	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
D_4x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1