Geometría de los sistemas Hamiltonianos con puertos

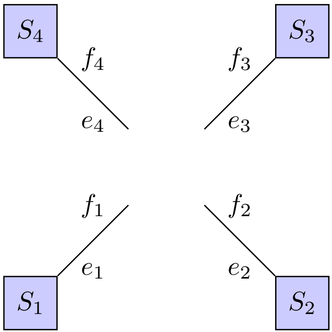
Eduardo García-Toraño Andrés

DEP. DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR, ARGENTINA

(+ M. Barbero-Liñán, H. Cendra y D. Martín de Diego)

BAHÍA BLANCA, 31 – MAYO – 2017

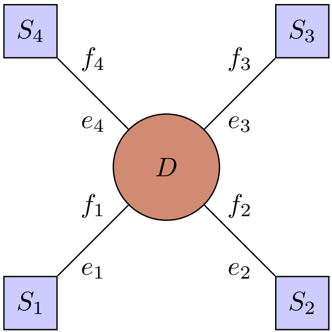
Interconexión [2014 – A. van der Schaft, D. Jeltsema]



- S_1, S_2, S_3, S_4 – (sub)-sistemas
- $f_i \in F_i$, “Flujo”
- $e_i \in \mathcal{E}_i = F_i^*$, “Esfuerzo”
- Puerto: $(f_i, e_i) \in F_i \times F_i^*$

Potencia ganada/perdida en cada puerto es $\langle e_i, f_i \rangle$

Interconexión [2014 – A. van der Schaft, D. Jeltsema]



- S_1, S_2, S_3, S_4 – (sub)-sistemas
- $f_i \in F_i$, "Flujo"
- $e_i \in \mathcal{E}_i = F_i^*$, "Esfuerzo"
- Puerto: $(f_i, e_i) \in F_i \times F_i^*$

Potencia ganada/perdida en cada puerto es $\langle e_i, f_i \rangle$

$D \subset (F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4) \times (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_4)$ debe de ser tal que

$$\frac{dE}{dt} = \langle e_1, f_1 \rangle + \langle e_2, f_2 \rangle + \langle e_3, f_3 \rangle + \langle e_4, f_4 \rangle = 0.$$

Interconexión (preserva la potencia) $\rightsquigarrow$ Estructura de Dirac

Estructuras de Dirac [1988 – Courant,Weinstein; 1990 – Courant]

- (P, ω) simpléctica. Subvariedad de ligaduras $i : C \hookrightarrow M$, $(C, i^*\omega)$ es *pre-simpléctica*.

Estructuras de Dirac [1988 – Courant,Weinstein; 1990 – Courant]

- (P, ω) simpléctica. Subvariedad de ligaduras $i : C \hookrightarrow M$, $(C, i^*\omega)$ es *pre-simpléctica*.

- ¿Qué ocurre en el caso $(P, \{\cdot, \cdot\})$ Poisson?

  Recordemos que una estructura de Poisson es un bivector $\Lambda \in \Gamma(\wedge^2 TP)$ tal que $\{f, g\} = \Lambda(df, dg)$ satisface Jacobi. La distribución característica

  $$S_x = \{v \in T_xP \mid \exists f \in C^\infty(P), v = X_f(x)\} \subset TP, \qquad (X_f = \{\cdot, f\})$$

  da lugar a una foliación simpléctica.

Estructuras de Dirac [1988 – Courant,Weinstein; 1990 – Courant]

- (P, ω) simpléctica. Subvariedad de ligaduras $i : C \hookrightarrow M$, $(C, i^*\omega)$ es *pre-simpléctica*.

- ¿Qué ocurre en el caso $(P, \{\cdot, \cdot\})$ Poisson?

  Recordemos que una estructura de Poisson es un bivector $\Lambda \in \Gamma(\wedge^2 TP)$ tal que $\{f, g\} = \Lambda(df, dg)$ satisface Jacobi. La distribución característica

  $$S_x = \{v \in T_xP \mid \exists f \in C^\infty(P), v = X_f(x)\} \subset TP, \qquad (X_f = \{\cdot, f\})$$

  da lugar a una foliación simpléctica.

¿Qué geometría hereda una subvariedad de Poisson? ¿Qué estructura subyace a una foliación pre-simpléctica?

Estructuras de Dirac: definición

Sea V espacio vectorial de dimensión finita, y $B : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal, simétrica (o antisimétrica) y $X \subset V$. El *ortogonal relativo a B* es:

$$X^{\perp} = \{w \in V \mid B(v, w) = 0 \text{ para cada } v \in X\}.$$

Dado V, consideramos la siguiente forma bilineal simétrica y no degenerada $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ en $V \oplus V^*$:

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle : (V \oplus V^*) \times (V \oplus V^*) &\to \mathbb{R}, \\ \big((v_1, v_1^*), (v_2, v_2^*)\big) &\mapsto \langle\!\langle (v_1, v_1^*), (v_2, v_2^*) \rangle\!\rangle := \langle v_2^*, v_1 \rangle + \langle v_1^*, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Definición: *Una estructura de Dirac lineal en V es un subespacio $D_V \subset V \oplus V^*$ tal que $D_V = D_V^{\perp}$. (es decir, un subespacio Lagrangiano.)*

Definición: *Una estructura de Dirac en una variedad M es un subfibrado Lagrangiano $D \subset TM \oplus T^*M$.*

Se dice integrable si

$$\langle \mathfrak{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle + \langle \mathfrak{L}_{X_2} \alpha_3, X_1 \rangle + \langle \mathfrak{L}_{X_3} \alpha_1, X_2 \rangle = 0, \qquad (X_i, \alpha_i) \in \Gamma(D).$$

Estructuras de Dirac: ejemplos

1. (M, ω) simpléctica,

$$D_\omega = \mathrm{graph}(\omega) = \{(v, \omega(v, \cdot) \mid v \in TM\} \subset TM \oplus T^*M.$$

Estructuras de Dirac: ejemplos

1. (M, ω) simpléctica,

$$D_\omega = \mathrm{graph}(\omega) = \{(v, \omega(v, \cdot) \mid v \in TM\} \subset TM \oplus T^*M.$$

2. (M, Λ) Poisson $(\{f, g\} = \Lambda(df, dg))$,

$$D_\Lambda = \mathrm{graph}(\Lambda) = \{(\Lambda(\cdot, \alpha), \alpha) \mid \alpha \in T^*M\} \subset TM \oplus T^*M.$$

Estructuras de Dirac: ejemplos

1. (M, ω) simpléctica,

$$D_\omega = \mathrm{graph}(\omega) = \{(v, \omega(v, \cdot) \mid v \in TM\} \subset TM \oplus T^*M.$$

2. (M, Λ) Poisson $(\{f, g\} = \Lambda(df, dg))$,

$$D_\Lambda = \mathrm{graph}(\Lambda) = \{(\Lambda(\cdot, \alpha), \alpha) \mid \alpha \in T^*M\} \subset TM \oplus T^*M.$$

3. (Véase [2013 – Bursztyn].) Sea $M = \mathbb{R}^3$,

$$D = \mathsf{span}\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y}, z dx\right), \left(\frac{\partial}{\partial x}, -z dy\right), (0, dz) \right\rangle.$$

Si $z \neq 0$, $D \cap TM = \{0\}$, así que $D = \mathrm{graph}(\Lambda)$ con

$$\Lambda = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}.$$

D es estructura de Dirac (suave), mientras que Λ es singular.

Supongamos dada una variedad de Dirac (M, D), y una *energia* $E\colon M \to \mathbb{R}$. Recordemos que $D \subset TM \oplus T^*M$.

Definición: *El sistema de Dirac* $(D, \mathrm{d}E)$ *es el siguiente sistema dinámico:*

$$\dot{\gamma}(t) \oplus \mathrm{d}E\,(\gamma(t)) \in D_{\gamma(t)} \quad \textit{para cada } \; t \in I,$$

para curvas $\gamma\colon I \to M$, $I \subset \mathbb{R}$.

Por ejemplo, (M, D_Λ),

$$\dot{\gamma} \oplus \mathrm{d}E \in D_\Lambda$$

son las ecs. de Hamilton.

Forward and Backward [2003 – Bursztyn, Radko]

Denotemos mediante $\mathfrak{Dir}(V)$ el conjunto de las estructuras de Dirac de V. Sean V, W espacios vectoriales y sea $L\colon V \to W$ lineal.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Dir}(V) \arrow[rr, bend left, "\mathcal{F}L"] & & \mathfrak{Dir}(W) \arrow[ll, bend left, "\mathcal{B}L"]
\end{tikzcd}$$

Proposición: *Los siguientes subespacios definen estructuras de Dirac:*

$$\mathcal{F}L(D_V) := \{(Lv, w^*) \in W \oplus W^* \mid v \in V,\ w^* \in W^*,\ (v, L^*w^*) \in D_V\}.$$

$$\mathcal{B}L(D_W) := \{(v, L^*w^*) \in V \oplus V^* \mid v \in V,\ w^* \in W^*,\ (Lv, w^*) \in D_W\}.$$

$\mathcal{F}, \mathcal{B}$ se comportan functorialmente: es decir,

$$\mathcal{F}(L \circ K) = \mathcal{F}L \circ \mathcal{F}K, \qquad \mathcal{B}(L \circ K) = \mathcal{B}K \circ \mathcal{B}L.$$

Se extiende a variedades.

Sistemas “Input-Output” [1999 – van der Schaft, Maschke]

Modelo básico ($x = x^i$, $i = 1, \dots n$):

$$\dot{x} = J(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x) + g(x) f,$$
$$e = g^T(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x).$$

- (vectores $\mathbb{R}^n$) f: flujo (inputs); e: esfuerzo (outputs).
- (matriz $n \times n$ antisimétrica) $J(x)$: “network topology”.
- (matriz $n \times n$) $g(x)$: influencia de los flujos f.

$$\frac{d}{dt}E = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial x}\left(J\frac{\partial E}{\partial x} + gf\right) = \frac{\partial E}{\partial x} gf = \langle e, f \rangle.$$

- **Sistema abierto**: $\frac{d}{dt}E = \langle e, f \rangle$ (no hay ligaduras).
- **Sistema interconectado (o cerrado):** $\frac{d}{dt}E = \langle e, f \rangle = 0$.

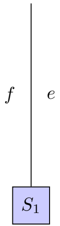
Sistemas “Input-Output” – Geometrización (I)

Sistema abierto

$$\dot{x} = J(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x) + g(x)f,$$
$$e = g^T(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x),$$

y

$$(f, e) \quad \text{“libre”}.$$

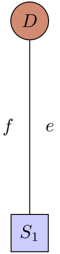


Sistema interconectado (o cerrado)

$$\dot{x} = J(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x) + g(x)f,$$
$$e = g^T(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x),$$

y

$$\langle f, e\rangle = 0.$$



Sistemas "Input-Output" – Geometrización (II)

Una estructura forward es una 5-upla

$$A = \left(\pi_{(U_1,M)}, \pi_{(U_2,M)}, D_{U_1}, D_{U_2}, g_{U_2 U_1}\right)$$

- $\pi_{(U_1,M)}$, $\pi_{(U_1,M)}$: fibrados vectoriales. Típicamente $U_1 = TM$.
- $D_{U_1} \subset U_1 \oplus U_1^*$: estructura de Dirac. Geometría del sistema.
- $D_{U_2} \subset U_2 \oplus U_2^*$: estructura de Dirac. Geometría de la interconexión.
- $g_{U_2 U_1} : U_2 \to U_1$: morfismo de fibrados vectoriales. Modela la interacción de los puertos con el sistema.

Definamos el siguiente morfismo de fibrados vectoriales:

$$\begin{aligned} \Phi_A \colon U_1 \oplus U_2 &\to U_1, \\ (u_1 \oplus u_2) &\mapsto \Phi_A(u_1 \oplus u_2) = u_1 + g_{U_2 U_1}(u_2). \end{aligned}$$

El sistema viene dado mediante:

$$D_A = \mathcal{F}(\Phi_A)\left(D_{U_1} \oplus D_{U_2}\right).$$

$$A = \left(\pi_{(U_1,M)}, \pi_{(U_2,M)}, D_{U_1}, D_{U_2}, g_{U_2U_1}\right) \Rightarrow D_A = \mathcal{F}(\Phi_A)\left(D_{U_1} \oplus D_{U_2}\right).$$

D_A es el conjunto de todos los $(u_1, \alpha_1) \in U_1 \oplus U_1^*$ tales que existe $(u_2, \alpha_2) \in U_2 \oplus U_2^*$ con

$$\left.\begin{aligned} (u_1 - g_{U_2U_1}(u_2), \alpha_1) \in D_{U_1}, \\ (u_2, \alpha_2) \in D_{U_2}, \\ g^*_{U_2U_1}\alpha_1 = \alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo: Dada una energía $E : M \to \mathbb{R}$, $U_1 = TM$, el sistema de Dirac correspondiente a $D_{U_2} = U_2 \oplus \{0\}$

$$(x, \dot{x}) \oplus \mathrm{d}E(x) \in D_\Lambda,$$

es (en coordenadas):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x) + g(x)f, \\ 0 &= g^T(x)\frac{\partial E}{\partial x}(x), \end{aligned}$$

Muchas gracias