Una metodología para el estudio de la frecuencia de ciclos límite en ecuaciones diferenciales con retardo

Romina Cobiaga y Walter Reartes

Universidad Nacional del Sur

Junio 2017

Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Introducción

- Se analizará la frecuencia de ciclos límite en ecuaciones diferenciales con retardo, dependientes de un parámetro.
  - Consideramos intervalos del parámetro donde el ciclo límite se preserva, dando lugar a una familia.
  - Si todos los ciclos de la familia tienen la misma frecuencia decimos que la familia es isocrónica.
- Transformamos el problema de estudiar la isocronía en el de buscar soluciones periódicas de una ecuación auxiliar.
- Se dan ejemplos de sistemas con retardo isocrónicos y no isocrónicos.

El sistema auxiliar

Las ecuaciones diferenciales con retardo son un caso particular de las

Ecuaciones diferenciales funcionales

$\mathbf{x}'(t) = F(t, \mathbf{x}_t),$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la función $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t+\theta)$ y $F : D \subset \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es continua.

En el caso de las ecuaciones con retardo, la funcional F es de la forma

$$F(t, \mathbf{x}_t) = h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau_1), \ldots, \mathbf{x}(t-\tau_k)),$$

donde $h \colon U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}^n$ es continua y hay una constante τ tal que $0 < \tau_i \leq \tau$, $i = 1, \cdots, k$.

El sistema auxiliar

Las ecuaciones diferenciales con retardo son un caso particular de las

Ecuaciones diferenciales funcionales

$\mathbf{x}'(t) = F(t, \mathbf{x}_t)$,

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la función $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t+\theta)$ y $F : D \subset \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es continua. En el caso de las ecuaciones con retardo, la funcional F es de la forma

$$F(t, \mathbf{x}_t) = h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau_1), \ldots, \mathbf{x}(t-\tau_k)),$$

donde h: $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}^n$ es continua y hay una constante τ tal que $0 < \tau_i \leq \tau$, $i = 1, \cdots, k$.

En este trabajo consideramos sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo del tipo

$$\begin{aligned} \bar{x}_1' &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1^\tau, \bar{x}_2^\tau, \mu) \\ \bar{x}_2' &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1^\tau, \bar{x}_2^\tau, \mu). \end{aligned}$$

Donde

- μ y τ son parámetros reales, $\tau > 0$,
- $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son funciones de la variable $\bar{t}$,
- $\bar{x}_1^\tau(t) = \bar{x}_1(t-\tau)$ y $\bar{x}_2^\tau(t) = \bar{x}_2(t-\tau)$,
- f_1 y f_2 son funciones reales suficientemente diferenciables.

Supongamos que el sistema anterior tiene un ciclo límite con frecuencia $\omega(\mu) > 0$, para todo μ en un intervalo real I.

En este trabajo consideramos sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo del tipo

$$\begin{aligned} \bar{x}_1' &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1^\tau, \bar{x}_2^\tau, \mu) \\ \bar{x}_2' &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1^\tau, \bar{x}_2^\tau, \mu). \end{aligned}$$

Donde

- μ y τ son parámetros reales, $\tau > 0$,
- $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son funciones de la variable $\bar{t}$,
- $\bar{x}_1^\tau(t) = \bar{x}_1(t-\tau)$ y $\bar{x}_2^\tau(t) = \bar{x}_2(t-\tau)$,
- f_1 y f_2 son funciones reales suficientemente diferenciables.

Supongamos que el sistema anterior tiene un ciclo límite con frecuencia $\omega(\mu) > 0$, para todo μ en un intervalo real I.

En este trabajo consideramos sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo del tipo

$$\begin{aligned} \bar{x}_1' &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1^\tau, \bar{x}_2^\tau, \mu) \\ \bar{x}_2' &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_1^\tau, \bar{x}_2^\tau, \mu). \end{aligned}$$

Donde

- μ y τ son parámetros reales, $\tau > 0$,
- $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son funciones de la variable $\bar{t}$,
- $\bar{x}_1^\tau(t) = \bar{x}_1(t-\tau)$ y $\bar{x}_2^\tau(t) = \bar{x}_2(t-\tau)$,
- f_1 y f_2 son funciones reales suficientemente diferenciables.

Supongamos que el sistema anterior tiene un ciclo límite con frecuencia $\omega(\mu) > 0$, para todo μ en un intervalo real I.

Haciendo $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, podemos reescribir la ecuación anterior

$$\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}^{\tau}, \mu).$$

De esta manera llamando $\bar{\mathbf{x}}_\mu$ al ciclo tenemos

$$\bar{\mathbf{x}}'_\mu = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_\mu, \mathbf{x}^{\tau}_\mu, \mu), \quad \text{donde } \bar{\mathbf{x}}_\mu \text{ es periódica de período } 2\pi/\omega(\mu).$$

Por el cambio de coordenadas $t = \omega(\mu)\bar{t}$, resulta

$$\omega(\mu)\mathbf{x}'_\mu = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}^{\omega\tau}_\mu, \mu).$$

Ahora este sistema tiene una solución periódica de período 2π.

Haciendo $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, podemos reescribir la ecuación anterior

$$\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}^{\tau}, \mu).$$

De esta manera llamando $\bar{\mathbf{x}}_\mu$ al ciclo tenemos

$$\bar{\mathbf{x}}'_\mu = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_\mu, \mathbf{x}^{\tau}_\mu, \mu), \quad \text{donde } \bar{\mathbf{x}}_\mu \text{ es periódica de período } 2\pi/\omega(\mu).$$

Por el cambio de coordenadas $t = \omega(\mu)\bar{t}$, resulta

$$\boxed{\omega(\mu)\mathbf{x}'_\mu = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}^{\omega\tau}_\mu, \mu).}$$

Ahora este sistema tiene una solución periódica de período 2π.

Haciendo $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, podemos reescribir la ecuación anterior

$$\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}^{\tau}, \mu).$$

De esta manera llamando $\bar{\mathbf{x}}_\mu$ al ciclo tenemos

$$\bar{\mathbf{x}}_\mu' = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}_\mu, \mathbf{x}_\mu^{\tau}, \mu), \quad \text{donde } \bar{\mathbf{x}}_\mu \text{ es periódica de período } 2\pi/\omega(\mu).$$

Por el cambio de coordenadas $t = \omega(\mu)\bar{t}$, resulta

$$\boxed{\omega(\mu)\mathbf{x}_\mu' = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}_\mu^{\omega\tau}, \mu).}$$

Ahora este sistema tiene una solución periódica de período 2π.

Derivando la ecuación anterior con respecto a μ y suponiendo que la frecuencia es constante, es decir $\omega(\mu) = \omega_0$, y por lo tanto $\partial\omega/\partial\mu = 0$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales no autónomas con retardo (sistema auxiliar)

$$\omega_0 \boldsymbol{\xi}' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu}\boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu^{\omega_0\tau}}\boldsymbol{\xi}^{\omega_0\tau} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}.$$

Donde

- $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) = \left(\frac{\partial x_{1\mu}}{\partial\mu}(t), \frac{\partial x_{2\mu}}{\partial\mu}(t)\right)$ y $\boldsymbol{\xi}^{\omega_0\tau}(t) = \boldsymbol{\xi}(t - \omega_0\tau)$,
- Las matrices $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}_\mu$ y $\partial\mathbf{f}/\mathbf{x}_\mu^{\omega_0\tau}$ son los jacobianos de $\mathbf{f}$ respecto de $x_{1\mu}$ y $x_{2\mu}$, y de $x_{1\mu}^{\omega_0\tau}$ y $x_{2\mu}^{\omega_0\tau}$. Los coeficientes son funciones periódicas de período 2π al estar evaluados sobre la órbita periódica.

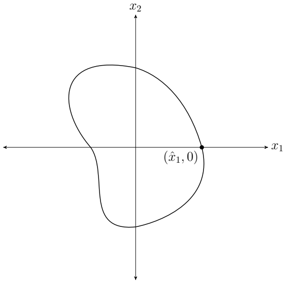
Derivando la ecuación anterior con respecto a μ y suponiendo que la frecuencia es constante, es decir $\omega(\mu) = \omega_0$, y por lo tanto $\partial\omega/\partial\mu = 0$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales no autónomas con retardo (sistema auxiliar)

$$\omega_0 \boldsymbol{\xi}' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu}\boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu^{\omega_0\tau}}\boldsymbol{\xi}^{\omega_0\tau} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu}.$$

Donde

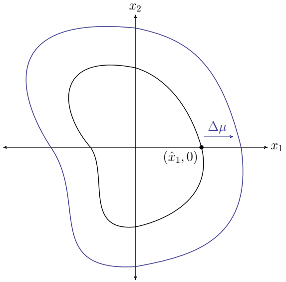
- $\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) = \left(\frac{\partial x_{1\mu}}{\partial \mu}(t), \frac{\partial x_{2\mu}}{\partial \mu}(t)\right)$ y $\boldsymbol{\xi}^{\omega_0\tau}(t) = \boldsymbol{\xi}(t - \omega_0\tau)$,
- Las matrices $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}_\mu$ y $\partial\mathbf{f}/\mathbf{x}_\mu^{\omega_0\tau}$ son los jacobianos de $\mathbf{f}$ respecto de $x_{1\mu}$ y $x_{2\mu}$, y de $x_{1\mu}^{\omega_0\tau}$ y $x_{2\mu}^{\omega_0\tau}$. Los coeficientes son funciones periódicas de período 2π al estar evaluados sobre la órbita periódica.

- Si el sistema original tiene un único ciclo límite que pasa por el punto $(\hat{x}_1, 0)$, entonces con una pequeña variación de μ obtenemos un nuevo ciclo.
- Si ese ciclo es estable la órbita que se obtiene al integrar la ecuación con una función que se mantiene constante en el valor $(\hat{x}_1, 0)$ para $t \in [-\tau, 0]$ probablemente converja al nuevo ciclo.



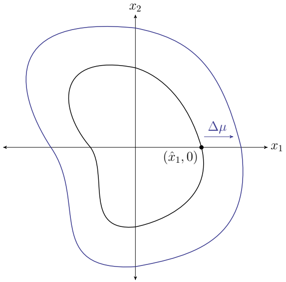
Nos interesa saber si la frecuencia del nuevo ciclo permanece constante frente a esa variación de μ.

- Si el sistema original tiene un único ciclo límite que pasa por el punto $(\hat{x}_1, 0)$, entonces con una pequeña variación de μ obtenemos un nuevo ciclo.
- Si ese ciclo es estable la órbita que se obtiene al integrar la ecuación con una función que se mantiene constante en el valor $(\hat{x}_1, 0)$ para $t \in [-\tau, 0]$ probablemente converja al nuevo ciclo.



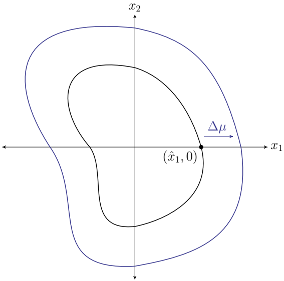
Nos interesa saber si la frecuencia del nuevo ciclo permanece constante frente a esa variación de μ.

- Si el sistema original tiene un único ciclo límite que pasa por el punto $(\hat{x}_1, 0)$, entonces con una pequeña variación de μ obtenemos un nuevo ciclo.
- Si ese ciclo es estable la órbita que se obtiene al integrar la ecuación con una función que se mantiene constante en el valor $(\hat{x}_1, 0)$ para $t \in [-\tau, 0]$ probablemente converja al nuevo ciclo.



Nos interesa saber si la frecuencia del nuevo ciclo permanece constante frente a esa variación de μ.

- Si el sistema original tiene un único ciclo límite que pasa por el punto $(\hat{x}_1, 0)$, entonces con una pequeña variación de μ obtenemos un nuevo ciclo.
- Si ese ciclo es estable la órbita que se obtiene al integrar la ecuación con una función que se mantiene constante en el valor $(\hat{x}_1, 0)$ para $t \in [-\tau, 0]$ probablemente converja al nuevo ciclo.



Nos interesa saber si la frecuencia del nuevo ciclo permanece constante frente a esa variación de μ.

- Si los puntos del eje ξ_1 son usados como el origen de órbitas del sistema auxiliar con condición inicial constante durante el tiempo de retardo, esas órbitas podrían converger a ciclos de período 2π. Esto es indicativo de que el sistema es isocrónico.
- En el caso de que no podamos hallar esas órbitas periódicas de período 2π, es una evidencia de que la familia no es isocrónica.

- Si los puntos del eje ξ_1 son usados como el origen de órbitas del sistema auxiliar con condición inicial constante durante el tiempo de retardo, esas órbitas podrían converger a ciclos de período 2π. Esto es indicativo de que el sistema es isocrónico.
- En el caso de que no podamos hallar esas órbitas periódicas de período 2π, es una evidencia de que la familia no es isocrónica.

Infinitos ciclos del sistema auxiliar

Supongamos que $\boldsymbol{\xi}_\mu$ es una solución de período 2π del sistema auxiliar.

Entonces $\boldsymbol{\xi}_\mu + \boldsymbol{\eta}_\mu$ también es solución de período 2π si $\boldsymbol{\eta}_\mu$ verifica la ecuación homogénea

$$\omega_0 \boldsymbol{\eta}'_\mu = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu} \boldsymbol{\eta}_\mu + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu^{\omega_0\tau}} \boldsymbol{\eta}_\mu^{\omega_0\tau}.$$

Si $\omega_0\tau$ es múltiplo de π entonces la ecuación anterior tiene infinitas soluciones proporcionales de período 2π y por lo tanto podemos encontrar infinitas órbitas 2π-periódicas para el sistema auxiliar.

Infinitos ciclos del sistema auxiliar

Supongamos que $\boldsymbol{\xi}_\mu$ es una solución de período 2π del sistema auxiliar.
Entonces $\boldsymbol{\xi}_\mu + \boldsymbol{\eta}_\mu$ también es solución de período 2π si $\boldsymbol{\eta}_\mu$ verifica la ecuación homogénea

$$\boxed{\omega_0 \boldsymbol{\eta}'_\mu = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu} \boldsymbol{\eta}_\mu + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mu^{\omega_0 \tau}} \boldsymbol{\eta}_\mu^{\omega_0 \tau}.}$$

Si $\omega_0 \tau$ es múltiplo de π entonces la ecuación anterior tiene infinitas soluciones proporcionales de período 2π y por lo tanto podemos encontrar infinitas órbitas 2π-periódicas para el sistema auxiliar.

Solo una de esas soluciones es la que nos permite escribir a $\mathbf{x}_\mu$ como una función de $\mathbf{x}_{\mu_0}$

$$\mathbf{x}_\mu = \mathbf{x}_{\mu_0} + \int_{\mu_0}^{\mu} \boldsymbol{\xi}_\nu \, d\nu.$$

Obtenemos el siguiente resultado

La familia es isocrónica respecto de μ, es decir la frecuencia no depende del parámetro en el intervalo, sí y sólo sí para algún $\mu = \mu_0$ el ciclo límite tiene frecuencia ω_0 y para todo μ en I el sistema auxiliar tiene una solución periódica de período 2π que es igual a la derivada de x_μ respecto de μ para $t \in [-\omega_0\tau, 0]$.

Solo una de esas soluciones es la que nos permite escribir a $\mathbf{x}_\mu$ como una función de $\mathbf{x}_{\mu_0}$

$$\mathbf{x}_\mu = \mathbf{x}_{\mu_0} + \int_{\mu_0}^{\mu} \boldsymbol{\xi}_\nu \, d\nu.$$

Obtenemos el siguiente resultado

La familia es isocrónica respecto de μ, es decir la frecuencia no depende del parámetro en el intervalo, sí y sólo sí para algún $\mu = \mu_0$ el ciclo límite tiene frecuencia ω_0 y para todo μ en I el sistema auxiliar tiene una solución periódica de período 2π que es igual a la derivada de x_μ respecto de μ para $t \in [-\omega_0 \tau, 0]$.

van der Pol con retardo

En el siguiente sistema

$$x'' + (x^2 - 1)x' + x = \mu x^\tau$$

el parámetro μ, para valores pequeños, genera una familia de órbitas periódicas que no es isocrónica.

El sistema auxiliar para esta ecuación es

$$\begin{array}{rcl} \omega_0 \xi_{1\mu}' & = & \xi_{2\mu} \\ \omega_0 \xi_{2\mu}' & = & -(1 + 2x_{1\mu}x_{2\mu})\xi_{1\mu} + (1 - x_{1\mu}^2)\xi_{2\mu} + \mu \xi_{1\mu}^{\omega_0 \tau} + x_{1\mu}^{\omega_0 \tau}. \end{array}$$

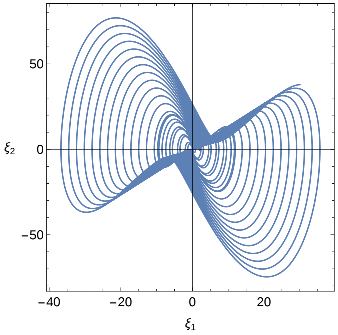
van der Pol con retardo

En el siguiente sistema

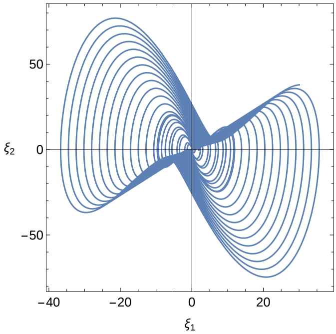
$$x'' + (x^2 - 1)x' + x = \mu x^\tau$$

el parámetro μ, para valores pequeños, genera una familia de órbitas periódicas que no es isocrónica.
El sistema auxiliar para esta ecuación es

$$\begin{array}{rcl} \omega_0 \xi'_{1\mu} & = & \xi_{2\mu} \\ \omega_0 \xi'_{2\mu} & = & -(1 + 2x_{1\mu}x_{2\mu})\xi_{1\mu} + (1 - x_{1\mu}^2)\xi_{2\mu} + \mu \xi_{1\mu}^{\omega_0 \tau} + x_{1\mu}^{\omega_0 \tau}. \end{array}$$



- En la figura se muestra una órbita del sistema auxiliar para $\mu = 0{,}1$, $\tau = 9$ y $\omega_0 = 0{,}99315$.
- Vemos que la órbita no es acotada, esto es un indicativo del carácter no isocrónico de la familia de ciclos.



- En la figura se muestra una órbita del sistema auxiliar para $\mu = 0{,}1$, $\tau = 9$ y $\omega_0 = 0{,}99315$.
- Vemos que la órbita no es acotada, esto es un indicativo del carácter no isocrónico de la familia de ciclos.

Péndulo rotatorio con retardo

Consideremos el sistema

$$
\begin{aligned}
x' &= y, \\
y' &= -(\beta - \cos(x - x^*))\sin(x - x^*) + \mu \sin(x - x^\tau),
\end{aligned}
$$

donde $x^* = \arccos(\beta)$.

- Aquí las ramas de Hopf que aparecen debido al retardo son isocrónicas y tienen frecuencia $\omega = (2n+1)\pi/\tau$, $n = 0, 1, \ldots$
- Para $\mu = 1$, $\beta = 0{,}5$ y $\tau = 2$, existen infinitas órbitas periódicas de período 2π distribuidas continuamente.
- Como se explicó anteriormente el sistema auxiliar tiene infinitos ciclos. Aquí mostramos sólo la primera rama de Hopf con $\omega = \pi/\tau$.

Péndulo rotatorio con retardo

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(\beta - \cos(x - x^*))\sin(x - x^*) + \mu \sin(x - x^\tau), \end{aligned}$$

donde $x^* = \arccos(\beta)$.

- Aquí las ramas de Hopf que aparecen debido al retardo son isocrónicas y tienen frecuencia $\omega = (2n+1)\pi/\tau$, $n = 0, 1, \ldots$
- Para $\mu = 1$, $\beta = 0{,}5$ y $\tau = 2$, existen infinitas órbitas periódicas de período 2π distribuidas continuamente.
- Como se explicó anteriormente el sistema auxiliar tiene infinitos ciclos. Aquí mostramos sólo la primera rama de Hopf con $\omega = \pi/\tau$.

Péndulo rotatorio con retardo

Consideremos el sistema

$$
\begin{aligned}
x' &= y, \\
y' &= -(\beta - \cos(x - x^*))\sin(x - x^*) + \mu \sin(x - x^\tau),
\end{aligned}
$$

donde $x^* = \arccos(\beta)$.

- Aquí las ramas de Hopf que aparecen debido al retardo son isocrónicas y tienen frecuencia $\omega = (2n+1)\pi/\tau$, $n = 0, 1, \ldots$
- Para $\mu = 1$, $\beta = 0{,}5$ y $\tau = 2$, existen infinitas órbitas periódicas de período 2π distribuidas continuamente.
- Como se explicó anteriormente el sistema auxiliar tiene infinitos ciclos. Aquí mostramos sólo la primera rama de Hopf con $\omega = \pi/\tau$.

Péndulo rotatorio con retardo

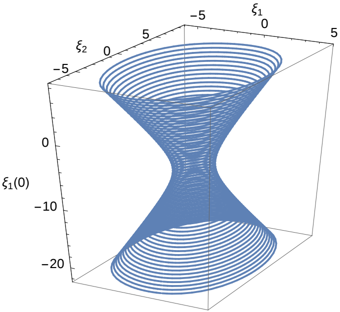
Consideremos el sistema

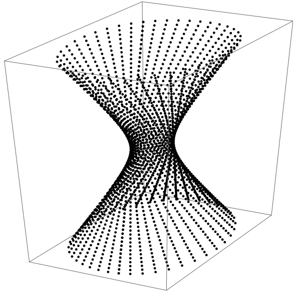
$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(\beta - \cos(x - x^*))\sin(x - x^*) + \mu \sin(x - x^\tau), \end{aligned}$$

donde $x^* = \arccos(\beta)$.

- Aquí las ramas de Hopf que aparecen debido al retardo son isocrónicas y tienen frecuencia $\omega = (2n+1)\pi/\tau$, $n = 0, 1, \ldots$
- Para $\mu = 1$, $\beta = 0{,}5$ y $\tau = 2$, existen infinitas órbitas periódicas de período 2π distribuidas continuamente.
- Como se explicó anteriormente el sistema auxiliar tiene infinitos ciclos. Aquí mostramos sólo la primera rama de Hopf con $\omega = \pi/\tau$.

Estos infinitos ciclos pueden graficarse como secciones horizontales de una superficie en el espacio de coordenadas ξ_1, ξ_2 y como tercer eje el valor inicial de la coordenada ξ_1 donde comienza la integracion, $\xi_1(0)$. La superficie determinada por estos ciclos es una superficie reglada.



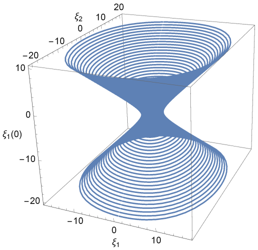


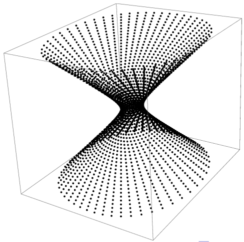
Oscilador anarmónico con retardo

El siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\beta x_1^3 - x_1 + \mu(x_1 - x_1^\tau), \end{aligned}$$

presenta bifurcaciones de Hopf cuando μ varía. Los ciclos emergentes tienen frecuencia $\omega = (2n+1)\pi/\tau$ para $n = 0, 1, \ldots$. Como en el ejemplo anterior, en este caso también hay infinitas órbitas de período 2π del sistema auxiliar.





¡Muchas gracias!