Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

CARLOS C. PEÑA
UNCPBA-FCExactas-DPTO. MATEMÁTICAS-NUCOMPA
TANDIL

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

Teorema, A. To-Ming Lau, A. Ülger, Proc. AMS, 2014.

Sean A álgebra de Banach con aproximación acotada de la unidad, I ideal cerrado de A.
I tiene aproximación acotada de la unidad sii $\exists a^{**} \in \mathcal{I}(A^{**})$ tal que $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado en A^* e $I = \{a \in A : aa^{**} = 0_{A^{**}}\}$.

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

ALGUNOS PROBLEMAS DERIVADOS

Asumimos que A es álgebra de Banach abeliana semisimple con aproximación acotada de la unidad.

1. Sea $\phi : A \to A$ homomorfismo.
   Entonces $\mathcal{I}(A^{**}) \neq \emptyset$ y $\phi^{**}[\mathcal{I}(A^{**})] \subset \mathcal{I}(A^{**})$.
   Dado $a^{**} \in \phi^{**}[\mathcal{I}(A^{**})]$ interesa decidir:
   (i) cuándo el ideal cerrado $\{a \in A : aa^{**} = 0_{A^{**}}\}$ de A tiene aproximación acotada de la unidad.
   (ii) ¿Puede realizarse $ker(\phi)$ como un ideal del tipo anterior?-
2. Caracterizar los $a^{**} \in A^{**}$: $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado en A^*.
3. Caracterizar los $a^{**} \in A^{**}$: $\{a \in A : aa^{**} = 0_{A^{**}}\} \in BAI$.
4. -¿Existe $a^* \in A^*$ tal que $A^{**}a^*$ es finito dimensional y w^*-cerrado?-

Teorema 1

Sea A álgebra de Banach, $a^{**} \in A^{**}$, $\rho_{a^{**}} : A \to A^{**}$, $\rho_{a^{**}}(a) = aa^{**}$ si $a \in A$.

1. $(a^{**}A^*)^{-w^*} = (ker \rho_{a^{**}})^{\perp}$. Luego $a^{**}A$ es w^*-cerrado sii $ker(\rho_{a^{**}})^{\perp} \subseteq a^{**}A^*$.
2. Si A^* es w^*-cerrado en A^{***} entonces $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado. En particular, esta situación se verifica si A es reflexivo.
3. Si A es álgebra de Banach débilmente compacta, $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado sii $\mathcal{R}[(\chi_A)^{-1} \circ \rho_{a^{**}}]$ es cerrado en A.

Ejemplo 1

Sea $A = c_0(S)$ el álgebra de Banach uniforme de funciones nulas en el infinito sobre un espacio discreto S.
Luego $A^* \approx l^1(S)$ y $A^{**} \approx l^\infty(S)$.
Dado $a^{**} \in A^{**}$ es

$$\begin{aligned} (a^{**}A^*)^{-w^*} &= span[\delta_s : s \in sop(a^{**})]^{-w^*} \\ &= span[\delta_s : s \in sop(a^{**})]^{-}. \end{aligned}$$

O sea $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado sii $\sum_{s\in sop(a^{**})} \mid a_s^*/a_s^{**} \mid < \infty$ cuando $\sum_{s\in sop(a^{**})} \mid a_s^* \mid < \infty$.
Esta condición se da claramente si a^{**} tiene soporte finito.
Sino, por el Ppio. de Acotación Uniforme sigue que la condición necesaria y suficiente es que sea inf $sop(a^{**}) > 0$.

CUANDO A ES C^*-ÁLGEBRA ABELIANA

Teorema 2

Sean A una C^*-álgebra abeliana no reflexiva y $a^{**} \in A^{**}$.

1. Si a^{**} es inversible o cuasinilpotente entonces $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado.
2. Sea $a^{**} \in A^{**} - \chi_A(A)$ idempotente.
   - (i) Hay un subespacio w^*-denso cerrado en norma $\Sigma_{a^{**}}$ de $\ker(\rho_{a^{**}})^\perp$ tal que $Aa^{**} \subseteq \chi_A(A \oplus [\Sigma_{a^{**}}]^\perp$.
   - (ii) Sea $\{a_t\}_{t\in T}$ red acotada de A tal que $a^{**} = w^* - \lim_{t\in T} \chi_{\mathcal{A}}(a_t)$. El conjunto $$\mathcal{J} = \{a \in A : \exists x \in A / a = w - \lim_{t\in T}(xa_t)\}$$ ideal de A. Dado $a \in A$, $\chi_A(a) \in Aa^{**}$ sii $a \in \mathcal{J}$.
   - (iii) $a^{**}A^*$ es w^*-cerrado sii $a^{**}A^* = A^*$.

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

Preliminares generales de la demostración

- A resulta Arens regular por tratarse de una C^*-álgebra abeliana.

  [S. Sherman: The 2nd. adjoint of a C^*-algebra, Proc. International Congress Math., Cambridge, 1950].

- A^{**} resulta C^*-álgebra abeliana porque A es abeliana regular. [P. Civin and B. Yood: The 2nd conjugate of a Banach algebra as a Banach algebra. Pacific J. Math., 1961].

- A^{**} es unitaria porque A tiene aproximación acotada de la unidad.

- El espacio de caracteres $\Delta(A^{**})$ es entonces compacto y la transformada de Gélfand : $A^{**} \to C[\Delta(A^{**})]$ es isomorfismo isométrico.

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

Demostración (esbozo) del Teorema 2

1.
   - Si $a^{**} \in A^{**}$ y $a \in ker(\rho_{a^{**}})$ es $G(\chi_A(a))G(a^{**}) = 0_{C[\Delta(A^{**})]}$.
   - Luego $h(\chi_A(a))h(a^{**}) = 0$ para cada $h \in \Delta(A^{**})$.
   - Si a^{**} es inversible sigue que $\sigma_{A^{**}}(\chi_A(a)) = \{0\}$.
   - Como χ_A es isométrica,
   - Puesto que A^{**} es semisimple y χ_A es isométrica, $a = 0_A$ y $ker(\rho_{a^{**}})^{\perp} = A^*$.
   - Cuando a^{**} es cuasinilpotente $ker(\rho_{a^{**}}) = A$, de donde $ker(\rho_{a^{**}})^{\perp} = \{0\}$.
   - Basta aplicar el Teorema 1(1).
2.
   - $ker(\rho_{a^{**}}) = \cap\{ker(h \circ \chi_A) : h \in I(a^{**})\}$, donde $I(a^{**}) = G(a^{**})^{-1}[\sigma_{A^{**}}(a^{**}) - \{0\}]$.

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

- $(\ker(\rho_{a^{**}}))^{\perp} = span[\cup_{h\in I(a^{**})} \ker(h\circ\chi_{\mathcal{A}})^{\perp}]^{-w^*} = [\Sigma_{a^{**}}]^{-w^*}$,
  donde
  $\Sigma_{a^{**}}$ =span$[S_{a^{**}}]^{-}$
  y
  $S_{a^{**}} = \{h\circ\chi_{\mathcal{A}} : h \in I(a^{**})\}$.
- Si $h \in \Delta(\mathcal{A}^{**})$ resulta $a^{**}(h\circ\chi_{\mathcal{A}}) = \langle h\circ\chi_{\mathcal{A}}, a^{**}\rangle h\circ\chi_{\mathcal{A}}$.
- Sea $h \in I(a^{**})$ tal que $\langle h\circ\chi_{\mathcal{A}}, a^{**}\rangle \neq 0$.
  Si $a^{**}\mathcal{A}^*$ es w^*-cerrado existe $x_h^* \in A^*$ tal que $h\circ\chi_A = a^{**}x_h^*$.

- Fijado $a^{**} \in A^{**} - \chi_A(A)$ idempotente tenemos
  $a^{**}x^*_{\mathfrak{h}} = a^{**}(\mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}}) = \langle \mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}}, a^{**} \rangle \mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}} = \mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}}$.
- Luego
  $\langle \mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}}, a^{**} \rangle = 1$
  y
  $a^{**}(\mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}}) = \mathfrak{h} \circ \chi_{\mathcal{A}}$.
- Si $a \in A$ and $a^* \in \Sigma_{a^{**}}$ es
  $\langle a^*, \chi_{\mathcal{A}}(a) \rangle = \langle a, a^* \rangle = \langle a, a^{**}a^* \rangle = \langle a^*a, a^{**} \rangle = \langle a^*, \rho_{a^{**}}(a) \rangle$,
  o sea $\rho_{a^{**}}(a) - \chi_{\mathcal{A}}(a) \in [\Sigma_{a^{**}}]^{\perp}$.
- Consideremos un homomorfismo no nulo $\varphi_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. El mismo admite una extensión natural, sobre la C^*-subalgebra $\mathcal{Q}$ of A^{**} generada por $\chi_A(A) \cup \{a^{**}\}$, a un homomorfismo φ_1 tal que $\varphi_1(a^{**}) = 1$.

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

- Como $\mathcal{Q}$ es *-álgebra de Banach conmutativa simétrica la frontera de Shilov $\partial\mathcal{Q}$ coincide con el espacio ideal maximal $\Delta(\mathcal{Q})$ [E. Kaniuth, Example 3.3.16].
- Entonces φ_1 se extiende a un carácter $\varphi_2 \in A^{**}$ [G. Corach, A. Maestripieri: Extension of characters and generalized Shilov boundaries, R. UMA, 1986].
- Si $\chi_A(a) \in [\Sigma_{a^{**}}]^\perp$ se tiene $\varphi_2 \in I(a^{**})$, $\varphi_2 \circ \chi_A \in \Sigma_{a^{**}}$ y
$$0 = \langle \varphi_2 \circ \chi_{\mathcal{A}}, \chi_{\mathcal{A}}(a) \rangle = \langle a, \varphi_2 \circ \chi_{\mathcal{A}} \rangle = \langle \chi_{\mathcal{A}}(a), \varphi_2 \rangle = \langle \chi_{\mathcal{A}}(a), \varphi_1 \rangle = \langle a, \varphi_0 \rangle.$$
- $a \in A$ es cuasinilpotente, i.e. $a = 0_A$, y
$$\mathcal{A}a^{**} \subseteq \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \oplus [\Sigma_{a^{**}}]^\perp.$$

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

Ejemplo

- Sea $A = C_0(G)$ el álgebra de Banach uniforme de funciones continuas nulas en el infinito sobre un grupo localmente compacto abeliano no discreto G, con identidad e y medida de Haar λ.
- $A^* \approx M(G)$ [T. Riesz]
- $A^* \approx l^1(G) \oplus_1 L^1(G, \lambda) \oplus_1 M_{cs}(G, \lambda)$, [Lebesgue-Radon-Nikodym].
- $A^{**} \approx l^\infty(G) \oplus_\infty L^\infty(G) \oplus_\infty M_{sc}(G, \lambda)^*$.
- Dados $m, n \in l^\infty(G)$, $M, N \in L^\infty(G)$ y $\mu, \eta \in M_{sc}(G)^*$ se tiene $(m, M, \mu)(n, N, \eta) = (mn, MN, \mu\Box\eta)$,

Clausura w^* de algunos subespacios del dual de ciertas álgebras de Banach abelianas

- Sean W entorno compacto de e, $M = I_{W-(0)}$ la función característica de $W-(0)$. Entonces M define un idempotente en A^{**} y MA^* no es w^*-cerrado.
- Precisamente, sea $\mathcal{N} = \{\lambda(U)^{-1} I_U\}_{U \in \mathcal{U}_e}$, donde $\mathcal{U}_e$ es la clase dirigida de entornos relativamente compactos simétricos de e.
- $\mathcal{N}$ es acotado en $L^1(G)$ and $\delta_e = w^* - \lim_{U \in \mathcal{U}_1} M[\lambda(U)^{-1} I_U]$, i.e. $\delta_e \in (MA^*)^{-w^*}$.
- Sin embargo $MA^* = \Lambda \oplus_1 ML^1(G,\lambda) \oplus_1 (0_{M_{cs}(G,\lambda)^*})$, con $\Lambda = \{\zeta \in l^1(G) : sop(\zeta) \subseteq W-(0)\}$.