Desigualdades en normas con pesos para extensiones vectoriales

María Eugenia Cejas [1]
Carlos Pérez Moreno [2]
Israel Rivera-Ríos [3]

XIV Monteiro, 2017, Bahía Blanca

[1] Departamento de Matemática, UNLP, CONICET
[2] BCAM; UPV/EHU
[3] UPV/EHU

Tabla De Contenidos

Objetivo de la charla

Objetivo: Extender al caso vectorial resultados de la teoría de pesos A_p del caso escalar.

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Recordemos que

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Recordemos que

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

Para responder esto, Muckenhoupt introdujo la clase de pesos A_p.

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Recordemos que

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

Para responder esto, Muckenhoupt introdujo la clase de pesos A_p.
Decimos que un peso w pertenece a la clase A_p, $1 < p < \infty$, si

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$,
$1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Recordemos que

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

Para responder esto, Muckenhoupt introdujo la clase de pesos A_p.
Decimos que un peso w pertenece a la clase A_p, $1 < p < \infty$, si

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\, dy \right)^{p-1} < \infty.$$

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Recordemos que

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

Para responder esto, Muckenhoupt introdujo la clase de pesos A_p.
Decimos que un peso w pertenece a la clase A_p, $1 < p < \infty$, si

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\, dy \right)^{p-1} < \infty.$$

Un peso w pertence a la clase A_1 si existe una constante C tal que

Motivación

Teoría de pesos:

Surge de forma natural con la siguiente cuestión
sabiendo que la maximal de Hardy-Littlewood M es acotada $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

¿se puede extender esto a $L^p(\mathbb{R}^n)$ reemplazando la medida de Lebesgue por una medida absolutamente continua wdx?

Recordemos que

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

Para responder esto, Muckenhoupt introdujo la clase de pesos A_p.
Decimos que un peso w pertenece a la clase A_p, $1 < p < \infty$, si

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\, dy \right)^{p-1} < \infty.$$

Un peso w pertence a la clase A_1 si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \leq C \inf_Q w.$$

y la menor de estas constantes se denota por $[w]_{A_1}$.

Muckenhoupt por los años 70 probó

Muckenhoupt por los años 70 probó

Theorem 1.1

a) Si $1 < p < \infty$ entonces M está acotado en $L^p(w)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_p$.
b) M es de tipo débil-(1,1), esto es

$$\sup_{t>0} t\, w\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Mf(x) > t\} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_1$.

Muckenhoupt por los años 70 probó

Theorem 1.1

a) Si $1 < p < \infty$ entonces M está acotado en $L^p(w)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_p$.
b) M es de tipo débil-(1,1), esto es

$$\sup_{t>0} t\, w\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_1$.

Este resultado abrió toda una nueva área de investigación. En los años 90 S. Buckley en su tesis doctoral probó que hay una dependencia bien precisa de esta constante:

Muckenhoupt por los años 70 probó

Theorem 1.1

a) Si $1 < p < \infty$ entonces M está acotado en $L^p(w)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_p$.
b) M es de tipo débil-(1,1), esto es

$$\sup_{t>0} t\, w\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x)dx$$

si, y sólo si, $w \in A_1$.

Este resultado abrió toda una nueva área de investigación. En los años 90 S. Buckley en su tesis doctoral probó que hay una dependencia bien precisa de esta constante:

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}.$$

donde el exponente es sharp.

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1/2} \max\{[w]_{A_\infty}, [w^{-1}]_{A_\infty}\}^{1/2}$$

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1/2}\,\max\{[w]_{A_\infty},[w^{-1}]_{A_\infty}\}^{1/2}$$

teniendo en cuenta que $c_n[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$. Luego Hytönen, Lerner y Pérez lo generalizaron al caso $p > 1$.

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1/2} \max\{[w]_{A_\infty}, [w^{-1}]_{A_\infty}\}^{1/2}$$

teniendo en cuenta que $c_n[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$. Luego Hytönen, Lerner y Pérez lo generalizaron al caso $p > 1$.
Previamente Hytönen probó la siguiente versión para la maximal de HL

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1/2}\max\{[w]_{A_\infty},[w^{-1}]_{A_\infty}\}^{1/2}$$

teniendo en cuenta que $c_n[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$. Luego Hytönen, Lerner y Pérez lo generalizaron al caso $p > 1$.
Previamente Hytönen probó la siguiente versión para la maximal de HL

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c\,[w]_{A_p}^{1/p}[w^{1-p'}]_{A_\infty}^{1/p}$$

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1/2} \max\{[w]_{A_\infty}, [w^{-1}]_{A_\infty}\}^{1/2}$$

teniendo en cuenta que $c_n[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$. Luego Hytönen, Lerner y Pérez lo generalizaron al caso $p > 1$.
Previamente Hytönen probó la siguiente versión para la maximal de HL

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c\,[w]_{A_p}^{1/p}[w^{1-p'}]_{A_\infty}^{1/p}$$

que mejora el teorema de Buckley. Estos resultados se conocen como resultados mixtos $A_p - A_\infty$.

Resultados en L^p_w: Caso escalar

- *Teoría L^p.*

Recientemente Hytönen (versión general) probó un resultado en el espíritu de Buckley para las integrales singulares:

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,n}[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}$$

donde T es un operador de Calderón Zygmund.
Hytönen y Pérez mejoraron el resultado de la siguiente manera:

$$\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1/2} \max\{[w]_{A_\infty}, [w^{-1}]_{A_\infty}\}^{1/2}$$

teniendo en cuenta que $c_n[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$. Luego Hytönen, Lerner y Pérez lo generalizaron al caso $p > 1$.
Previamente Hytönen probó la siguiente versión para la maximal de HL

$$\|M\|_{L^p(w)} \leq c\,[w]_{A_p}^{1/p}[w^{1-p'}]_{A_\infty}^{1/p}$$

que mejora el teorema de Buckley. Estos resultados se conocen como resultados mixtos $A_p - A_\infty$. Lerner, Ombrosi y Pérez prueban

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_T\, pp'[w]_{A_1}^{\frac{1}{p}}[w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}}.$$

que constituye una mejora del Teorema A_1.

- *Teoría L^1.*

Es bien sabido desde los años 70 que las los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1.

• *Teoría L^1.*
Es bien sabido desde los años 70 que las los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1. Este resultado se mejoró recientemente por Lerner Ombrosi y Pérez. Probarón la siguiente desigualdad:

• *Teoría L^1.*

Es bien sabido desde los años 70 que las los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1. Este resultado se mejoró recientemente por Lerner Ombrosi y Pérez. Probarón la siguiente desigualdad:

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T \log r' \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, M_r w dx \qquad w \geq 0, r > 1.$$

• *Teoría L^1.*
Es bien sabido desde los años 70 que las los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1. Este resultado se mejoró recientemente por Lerner Ombrosi y Pérez. Probarón la siguiente desigualdad:

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T \log r' \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, M_r w dx \qquad w \geq 0, r > 1.$$

donde $M_r w = (Mw^r)^{1/r}$.

• *Teoría L^1.*
Es bien sabido desde los años 70 que las los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1. Este resultado se mejoró recientemente por Lerner Ombrosi y Pérez. Probarón la siguiente desigualdad:

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T \log r' \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, M_r w dx \qquad w \geq 0, r > 1.$$

donde $M_r w = (Mw^r)^{1/r}$.
De esto se deduce que si $w \in A_1$, eligiendo r adecuadamente

• *Teoría L^1.*
Es bien sabido desde los años 70 que las los operadores de Calderón-Zygmund son de tipo débil $(1,1)$ con respecto a los pesos A_1. Este resultado se mejoró recientemente por Lerner Ombrosi y Pérez. Probarón la siguiente desigualdad:

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T \log r' \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, M_r w dx \qquad w \geq 0, r > 1.$$

donde $M_r w = (Mw^r)^{1/r}$.
De esto se deduce que si $w \in A_1$, eligiendo r adecuadamente

$$\|Tf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_T [w]_{A_1} \log(1 + [w]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, w dx.$$

Extensiones vectoriales

La teoría de pesos permite extender vectorialmente muchos resultados de la teoría clásica. El más conocido es la extensión vectorial de M probado por Fefferman y Stein: si $1 < p, q < \infty$, entonces

Extensiones vectoriales

La teoría de pesos permite extender vectorialmente muchos resultados de la teoría clásica. El más conocido es la extensión vectorial de M probado por Fefferman y Stein: si $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Extensiones vectoriales

La teoría de pesos permite extender vectorialmente muchos resultados de la teoría clásica. El más conocido es la extensión vectorial de M probado por Fefferman y Stein: si $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente importante o más es el extremo:

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Extensiones vectoriales

La teoría de pesos permite extender vectorialmente muchos resultados de la teoría clásica. El más conocido es la extensión vectorial de M probado por Fefferman y Stein: si $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente importante o más es el extremo:

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente, hay una versión de este teorema para las integrales singulares:

$$\left\| \left(\sum_j |Tf_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Extensiones vectoriales

La teoría de pesos permite extender vectorialmente muchos resultados de la teoría clásica. El más conocido es la extensión vectorial de M probado por Fefferman y Stein: si $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente importante o más es el extremo:

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente, hay una versión de este teorema para las integrales singulares:

$$\left\| \left(\sum_j |Tf_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

y también se tiene en el extremo

$$\left\| \left(\sum_j (Tf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Extensiones vectoriales

La teoría de pesos permite extender vectorialmente muchos resultados de la teoría clásica. El más conocido es la extensión vectorial de M probado por Fefferman y Stein: si $1 < p, q < \infty$, entonces

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente importante o más es el extremo:

$$\left\| \left(\sum_j (Mf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Igualmente, hay una versión de este teorema para las integrales singulares:

$$\left\| \left(\sum_j |Tf_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

y también se tiene en el extremo

$$\left\| \left(\sum_j (Tf_j)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left(\sum_j |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ambos se prueban a partir de una buena desigualdad con pesos pero escalar.

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

con $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $x \notin$ supp f y $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

con $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $x \notin \operatorname{supp} f$ y $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que

- $|K(x,y)| \leq C_K \frac{1}{|x-y|^n} \qquad x \neq 0.$

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

con $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $x \notin \operatorname{supp} f$ y $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que

- $|K(x,y)| \leq C_K \frac{1}{|x-y|^n} \qquad x \neq 0.$
- Si $|y-z| < \frac{1}{2}|x-y|$,

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(x,y) - K(z,y)| \leq \frac{1}{|x-y|^n}\omega\left(\frac{|y-z|}{|x-y|}\right)$$

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

con $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $x \notin \operatorname{supp} f$ y $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que

- $|K(x,y)| \leq C_K \frac{1}{|x-y|^n} \qquad x \neq 0.$
- Si $|y-z| < \frac{1}{2}|x-y|$,

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(x,y) - K(z,y)| \leq \frac{1}{|x-y|^n}\omega\left(\frac{|y-z|}{|x-y|}\right)$$

$\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ módulo de continuidad: función creciente y subaditiva tal que $\omega(0) = 0$.

Preliminares

Un operador T es ω-Calderón-Zygmund si T es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$

con $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $x \notin \text{supp } f$ y $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que

- $|K(x,y)| \leq C_K \frac{1}{|x-y|^n} \qquad x \neq 0.$
- Si $|y-z| < \frac{1}{2}|x-y|$,

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(x,y) - K(z,y)| \leq \frac{1}{|x-y|^n}\omega\left(\frac{|y-z|}{|x-y|}\right)$$

$\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ módulo de continuidad: función creciente y subaditiva tal que $\omega(0) = 0$.
Consideraremos el caso en ω satisface la condición de Dini, esto es $\|\omega\|_{\text{Dini}} = \int_0^1 \omega(t)\frac{dt}{t} < \infty$. El caso clásico es $\omega(t) = ct^\delta$ o sea que K satisface la condición Hölder-Lipschitz.

Dado $1 < q < \infty$ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ llamaremos $|f|_q$ a $|f(x)|_q = |f|_q(x)$

Dado $1 < q < \infty$ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ llamaremos $|f|_q$ a $|f(x)|_q = |f|_q(x)$

$$|f(x)|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\mathcal{D}(Q)$ denota la grilla diádica que se obtiene subdividiendo Q y sus descendendientes en 2^n cubos de la misma longitud.

$\mathcal{D}(Q)$ denota la grilla diádica que se obtiene subdividiendo Q y sus descendendientes en 2^n cubos de la misma longitud.
$\mathcal{D}$ es un dyadic lattice en $\mathbb{R}^n$ si es una familia de cubos con las siguiente propiedades

$\mathcal{D}(Q)$ denota la grilla diádica que se obtiene subdividiendo Q y sus descendendientes en 2^n cubos de la misma longitud.
$\mathcal{D}$ es un dyadic lattice en $\mathbb{R}^n$ si es una familia de cubos con las siguiente propiedades

1. Si $Q \in \mathcal{D}$, cada descendiente de Q está en $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}(Q)$ denota la grilla diádica que se obtiene subdividiendo Q y sus descendendientes en 2^n cubos de la misma longitud.
$\mathcal{D}$ es un dyadic lattice en $\mathbb{R}^n$ si es una familia de cubos con las siguiente propiedades

1. Si $Q \in \mathcal{D}$, cada descendiente de Q está en $\mathcal{D}$.
2. Para cada par de cubos Q_1, Q_2 podemos encontrar un ancestro, esto es, un cubo $Q \in \mathcal{D}$ tal que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(Q)$.

$\mathcal{D}(Q)$ denota la grilla diádica que se obtiene subdividiendo Q y sus descendendientes en 2^n cubos de la misma longitud.
$\mathcal{D}$ es un dyadic lattice en $\mathbb{R}^n$ si es una familia de cubos con las siguiente propiedades

1. Si $Q \in \mathcal{D}$, cada descendiente de Q está en $\mathcal{D}$.
2. Para cada par de cubos Q_1, Q_2 podemos encontrar un ancestro, esto es, un cubo $Q \in \mathcal{D}$ tal que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(Q)$.
3. Para cada compacto K existe un cubo $Q \in \mathcal{D}$ tal que $K \subseteq Q$.

$\mathcal{D}(Q)$ denota la grilla diádica que se obtiene subdividiendo Q y sus descendendientes en 2^n cubos de la misma longitud.
$\mathcal{D}$ es un dyadic lattice en $\mathbb{R}^n$ si es una familia de cubos con las siguiente propiedades

1. Si $Q \in \mathcal{D}$, cada descendiente de Q está en $\mathcal{D}$.
2. Para cada par de cubos Q_1, Q_2 podemos encontrar un ancestro, esto es, un cubo $Q \in \mathcal{D}$ tal que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}(Q)$.
3. Para cada compacto K existe un cubo $Q \in \mathcal{D}$ tal que $K \subseteq Q$.

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ es η-sparse con $\eta \in (0,1)$ si para cada $Q \in \mathcal{S}$ podemos encontrar un conjunto medible $E_Q \subseteq Q$ tal que

$$\eta|Q| \leq |E_Q|$$

y los E_Q son disjuntos dos a dos.

Sea $r > 0$ y $\eta \in (0,1)$. $\mathcal{D}$ un dyadic lattice y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ una familia η-sparse. Definimos el operador

Sea $r > 0$ y $\eta \in (0,1)$. $\mathcal{D}$ un dyadic lattice y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ una familia η-sparse. Definimos el operador

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{r} f(x) = \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{Q} |f(y)| dy \right)^{r} \chi_{Q}(x) \right)^{\frac{1}{r}}$$

Sea $r > 0$ y $\eta \in (0,1)$. $\mathcal{D}$ un dyadic lattice y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ una familia η-sparse. Definimos el operador

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{r} f(x) = \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^r \chi_Q(x) \right)^{\frac{1}{r}}$$

Dado un par de pesos w y σ denotamos

$$[w, \sigma]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sigma \right)^{p-1}$$

Sea $r > 0$ y $\eta \in (0,1)$. $\mathcal{D}$ un dyadic lattice y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ una familia η-sparse. Definimos el operador

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{r} f(x) = \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^r \chi_Q(x) \right)^{\frac{1}{r}}$$

Dado un par de pesos w y σ denotamos

$$[w,\sigma]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sigma \right)^{p-1}$$

y

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q).$$

Sea $r > 0$ y $\eta \in (0,1)$. $\mathcal{D}$ un dyadic lattice y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ una familia η-sparse. Definimos el operador

$$\mathcal{A}^r_{\mathcal{S}} f(x) = \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right)^r \chi_Q(x) \right)^{\frac{1}{r}}$$

Dado un par de pesos w y σ denotamos

$$[w, \sigma]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sigma \right)^{p-1}$$

y

$$[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(w\chi_Q).$$

Si $w \in A_p$ se tiene que $c_n[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$. De ahí la mejoras en normas mixtas.

Desigualdades para operadores tipo sparse

La prueba de nuestros resultados se basan en

Desigualdades para operadores tipo sparse

La prueba de nuestros resultados se basan en

Theorem 2.1

Sea $1 < p < \infty$ y $r > 0$. Sean w, σ un par de pesos. Luego

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^r f\|_{L^p(w)} \lesssim [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)_+} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L^p(w)}$$

Desigualdades para operadores tipo sparse

La prueba de nuestros resultados se basan en

Theorem 2.1

Sea $1 < p < \infty$ y $r > 0$. Sean w, σ un par de pesos. Luego

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^r f\|_{L^p(w)} \lesssim [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)_+} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \|f\|_{L^p(w)}$$

Theorem 2.2

Sea, $r > 0$, y $1 < p < \infty$ tal que $p \neq r$. Sean w, σ un par de pesos. Luego

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^r f\|_{L^{p,\infty}(w)} \lesssim [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_\infty}^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)_+} \|f\|_{L^p(w)}$$

Esto fue probado por Hytönen y Li.

Resultados para la extensión vectorial de la maximal de Hardy-Littlewood

Si $1 < q < \infty$ definimos la extensión vectorial del operador maximal de Hardy-Littlewood

Resultados para la extensión vectorial de la maximal de Hardy-Littlewood

Si $1 < q < \infty$ definimos la extensión vectorial del operador maximal de Hardy-Littlewood

$$\overline{M}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} Mf_j(x)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Resultados para la extensión vectorial de la maximal de Hardy-Littlewood

Si $1 < q < \infty$ definimos la extensión vectorial del operador maximal de Hardy-Littlewood

$$\overline{M}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} M f_j(x)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Obtuvimos la siguiente acotación de $\overline{M}_q$ por operadores de tipo sparse.

Theorem 3.1

Sea $1 < q < \infty$ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, tal que $\varepsilon > 0$

$$\left| \left\{ x \in [-R, R]^n \, : \, |\overline{M}_q f(x)| > \varepsilon \right\} \right| = o(R^n).$$

Existen 3^n dyadic lattices $\mathcal{D}_k$ y 3^n familias $\frac{1}{6}$-sparse $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{D}_k$ que dependen de f tal que

$$|\overline{M}_q f(x)| \leq c_{n,q} \sum_{k=1}^{3^n} \mathcal{A}_{\mathcal{S}_k}^q |f|_q(x)$$

donde $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_k}^q |f|_q(x) = \left(\sum_{Q \in \mathcal{S}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|_q \right)^q \chi_Q(x) \right)^{\frac{1}{q}}$

Usando este control puntual y como consecuencia de las desigualdades que valen para estos operadores obtenemos el siguiente resultado

Usando este control puntual y como consecuencia de las desigualdades que valen para estos operadores obtenemos el siguiente resultado

Theorem 3.2

Sea $1 < p, q < \infty$ y w y σ un par de pesos. Luego

$$\|\overline{M}_q(\sigma f)\|_{L^p(w)} \lesssim [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \||f|_q\|_{L^p(\sigma)}.$$

Si además $p \neq q$,

$$\|\overline{M}_q(\sigma f)\|_{L^{p,\infty}(w)} \lesssim [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_\infty}^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)_+} \||f|_q\|_{L^p(\sigma)}.$$

Estimaciones para las extensiones vectoriales de operadores de Calderón-Zygmund

Sea $1 < q < \infty$, T un ω-CZ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Definimos

Estimaciones para las extensiones vectoriales de operadores de Calderón-Zygmund

Sea $1 < q < \infty$, T un ω-CZ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Definimos

$$\overline{T}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Estimaciones para las extensiones vectoriales de operadores de Calderón-Zygmund

Sea $1 < q < \infty$, T un ω-CZ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Definimos

$$\overline{T}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

La continuidad de estos operadores fue probada por Cordoba y Fefferman. Estimaciones con pesos para estos operadores fueron obtenidas por Cruz-Uribe , Pérez y Trujillo. Lerner probó el control de los CZ por operadores de tipo sparse. Siguiendo sus ideas obtuvimos el análogo para $\overline{T}_q$.

Estimaciones para las extensiones vectoriales de operadores de Calderón-Zygmund

Sea $1 < q < \infty$, T un ω-CZ y $f = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. Definimos

$$\overline{T}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

La continuidad de estos operadores fue probada por Cordoba y Fefferman. Estimaciones con pesos para estos operadores fueron obtenidas por Cruz-Uribe , Pérez y Trujillo. Lerner probó el control de los CZ por operadores de tipo sparse. Siguiendo sus ideas obtuvimos el análogo para $\overline{T}_q$.

Theorem 3.3

Sea T a ω-CZ y $1 < q < \infty$. Si $f = \{f_j\}$ y $|f|_q \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto, existen 3^n dyadic lattices $\mathcal{D}_k$ y 3^n $\frac{1}{2}$-familias sparse $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{D}_k$ tal que

$$\left|\overline{T}_q f(x)\right| \leq c_n C_T \sum_{k=1}^{3^n} \mathcal{A}_{\mathcal{S}_k} |f|_q(x)$$

donde $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int f(y) dy \chi_Q(x)$ y $C_T = C_K + \|\omega\|_{\text{Dini}} + \|T\|_{L^2 \to L^2}$.

Constantes mixtas $A_p - A_\infty$

Con este control por operadores de tipo sparse y las estimaciones que dimos antes para estos operadores tenemos que

Constantes mixtas $A_p - A_\infty$

Con este control por operadores de tipo sparse y las estimaciones que dimos antes para estos operadores tenemos que

Theorem 3.4

Sea $1 < p,\ q < \infty$, w y σ un par de pesos, y T un ω-CZ. Luego

$$\|\overline{T}_q(\sigma f)\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p,q} C_T [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \left([w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} + [\sigma]_{A_\infty}^{\frac{1}{p}} \right) \||f|_q\|_{L^p(\sigma)}$$

y

$$\|\overline{T}_q(\sigma f)\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq c_{n,p,q} C_T [w,\sigma]_{A_p}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} \||f|_q\|_{L^p(\sigma)}.$$

Endpoints

Theorem 3.5

Sea w un peso, $1 < q < \infty$. Luego, tenemos que

$$\|\overline{T}_q(f)\|_{L^{1,\infty}(w)} \lesssim (1+\log r') \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q M_r w(x)dx \qquad r > 1.$$

$$\|\overline{T}_q(f)\|_{L^{1,\infty}(w)} \lesssim \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q M_{L(\log\log L)^{1+\varepsilon}} w(x)dx \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Más aún si $w \in A_1$

$$\|\overline{T}_q(f)\|_{L^{1,\infty}(w)} \lesssim [w]_{A_1} \log(e+[w]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q w(x)dx$$

Endpoints

Theorem 3.5

Sea w un peso, $1 < q < \infty$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\overline{T}_q(f)\|_{L^{1,\infty}(w)} &\lesssim (1+\log r') \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q M_r w(x) dx \qquad r > 1. \\ \|\overline{T}_q(f)\|_{L^{1,\infty}(w)} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q M_{L(\log\log L)^{1+\varepsilon}} w(x) dx \qquad 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Más aún si $w \in A_1$

$$\|\overline{T}_q(f)\|_{L^{1,\infty}(w)} \lesssim [w]_{A_1} \log(e + [w]_{A_\infty}) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q w(x) dx$$

Este resultado es el análogo que obtienen para el caso escalar Lerner, Ombrosi y Pérez.

Teorema A_1

Otra generalización al caso vectorial del Teorema A_1 que obtienen Lerner, Ombrosi y Pérez para el caso escalar es el siguiente teorema:

Teorema A_1

Otra generalización al caso vectorial del Teorema A_1 que obtienen Lerner, Ombrosi y Pérez para el caso escalar es el siguiente teorema:

Theorem 3.6

Sea $p, q \in (1, \infty)$, T ω-CZ y w un peso. Luego

$$||\overline{T}_q f||_{L^p(w)} \leq c_{n,q} C_T pp'(r')^{\frac{1}{p'}} |||f|_q||_{L^p(M_r w)} \qquad r > 1.$$

Además, si $w \in A_1$ luego tenemos la siguiente estimación

$$||\overline{T}_q f||_{L^p(w)} \leq c_{n,q} C_T pp'[w]_{A_1}^{\frac{1}{p}} [w]_{A_\infty}^{\frac{1}{p'}} |||f|_q||_{L^p(w)},$$

y si $w \in A_s$,con $1 \leq s < p < \infty$, vale que

$$||\overline{T}_q f||_{L^p(w)} \leq c_{n,q,p,T} [w]_{A_s} |||f|_q||_{L^p(w)}.$$

Observaciones

- Obtuvimos resultados en esta línea también para la extensión vectorial del conmutador de un T ω CZ, es decir para el operador

Observaciones

- Obtuvimos resultados en esta línea también para la extensión vectorial del conmutador de un T ω CZ, es decir para el operador

$$\overline{[b,T]}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b,T]f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

  donde $[b,T]g(x) = bTg - Tbg$.
- Pregunta natural: Se puede extender los resultados obtenidos para las extensiones vectoriales de los operadores tipo rough"

Observaciones

- Obtuvimos resultados en esta línea también para la extensión vectorial del conmutador de un T ω CZ, es decir para el operador

$$\overline{[b,T]}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b,T]f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

donde $[b,T]g(x) = bTg - Tbg$.

- Pregunta natural: Se puede extender los resultados obtenidos para las extensiones vectoriales de los operadores tipo rough"

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)dy.$$

Observaciones

- Obtuvimos resultados en esta línea también para la extensión vectorial del conmutador de un T ω CZ, es decir para el operador

$$\overline{[b,T]}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b,T] f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

donde $[b,T]g(x) = bTg - Tbg$.

- Pregunta natural: Se puede extender los resultados obtenidos para las extensiones vectoriales de los operadores tipo rough"

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y) dy.$$

donde $x' = \frac{x}{|x|}$, $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ y $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$.

Observaciones

- Obtuvimos resultados en esta línea también para la extensión vectorial del conmutador de un T ω CZ, es decir para el operador

$$\overline{[b,T]}_q f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |[b,T]f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

donde $[b,T]g(x) = bTg - Tbg$.

- Pregunta natural: Se puede extender los resultados obtenidos para las extensiones vectoriales de los operadores tipo rough"

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} f(x-y)dy.$$

donde $x' = \frac{x}{|x|}$, $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ y $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$. Estamos trabajando con esto basándonos en ideas de Hytönen, Roncal y Tapiola entre otros autores.

GRACIAS POR SU ATENCION!!!!!!!!!!