Una revisión de la inversa core EP

D.E. FERREYRA, F.E. LEVIS, N. THOME

Índice I

Introducción

Resumen

En este trabajo:

Resumen

En este trabajo:

- Se da una nueva caracterización y representación de la inversa core EP usando la descomposición core EP.

Resumen

En este trabajo:

- Se da una nueva caracterización y representación de la inversa core EP usando la descomposición core EP.

- Se dan nuevas propiedades de la inversa core EP y su conexión con las inversas BT y DMP.

Resumen

En este trabajo:

- Se da una nueva caracterización y representación de la inversa core EP usando la descomposición core EP.
- Se dan nuevas propiedades de la inversa core EP y su conexión con las inversas BT y DMP.
- Se da una forma canónica de la inversa core EP a partir de la descomposición de Hartwig-Spindelböck que provee una manera sencilla de calcularla.

Notaciones y Definiciones

Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathrm{rk}(A)$, denotarán la transpuesta conjugada, la inversa, el espacio columna, el núcleo y el rango de A, respectivamente.

Notaciones y Definiciones

Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathrm{rk}(A)$, denotarán la transpuesta conjugada, la inversa, el espacio columna, el núcleo y el rango de A, respectivamente.

Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface la igualdad $AXA = A$ es llamada una inversa interior de A. La clase de todas las inversas de A es denotada por $A\{1\}$.

Notaciones y Definiciones

Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y rk(A), denotarán la transpuesta conjugada, la inversa, el espacio columna, el núcleo y el rango de A, respectivamente.

Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface la igualdad $AXA = A$ es llamada una inversa interior de A. La clase de todas las inversas de A es denotada por $A\{1\}$.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el índice de A, denotado por Ind(A), es el menor de los enteros no negativos k tal que $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$.

Notaciones y Definiciones

Para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y rk(A), denotarán la transpuesta conjugada, la inversa, el espacio columna, el núcleo y el rango de A, respectivamente.

Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface la igualdad $AXA = A$ es llamada una inversa interior de A. La clase de todas las inversas de A es denotada por $A\{1\}$.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, el índice de A, denotado por Ind(A), es el menor de los enteros no negativos k tal que $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$.

Se dice que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz EP si $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.

Notaciones y Definiciones

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. La única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *satisfaciendo*

$$AXA = A, \qquad XAX = X, \quad (AX)^* = AX \quad \text{y} \quad (XA)^* = XA,$$

es llamada la inversa de Moore-Penrose de A *y es denotada por* $A^\dagger$*.*

Notaciones y Definiciones

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *La única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *satisfaciendo*

$$AXA = A, \qquad XAX = X, \quad (AX)^* = AX \quad \textit{y} \quad (XA)^* = XA,$$

es llamada la inversa de Moore-Penrose de A *y es denotada por* $A^\dagger$.

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *La única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *satisfaciendo*

$$XAX = X, \quad AX = XA \quad \textit{y} \quad A^{k+1}X = A^k,$$

donde $k = \text{Ind}(A)$, *es llamada la inversa de Drazin de* A *y es denotada por* A^d.

Notaciones y Definiciones

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. La única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *satisfaciendo*

$$AXA = A, \qquad XAX = X, \quad (AX)^* = AX \quad \text{y} \quad (XA)^* = XA,$$

es llamada la inversa de Moore-Penrose de A *y es denotada por* $A^\dagger$*.*

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*. La única matriz* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *satisfaciendo*

$$XAX = X, \quad AX = XA \quad \text{y} \quad A^{k+1}X = A^k,$$

donde $k =$ *Ind*(A)*, es llamada la inversa de Drazin de* A *y es denotada por* A^d*.*

Si Ind$(A) \leq 1$, entonces la inversa de Drazin de A es llamada la inversa de grupo de A y es denotada por $A^\#$.

La inversa core

O. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

En el trabajo anterior, los autores introdujeron una nueva inversa generalizada de la siguiente manera

La inversa core

O. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

En el trabajo anterior, los autores introdujeron una nueva inversa generalizada de la siguiente manera

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A),$$

es llamada la inversa core de A y es denotada por $A^{\oplus}$, donde P_A es el proyector ortogonal sobre el rango de A, es decir, $P_A = AA^{\dagger}$.

La inversa core

O. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

En el trabajo anterior, los autores introdujeron una nueva inversa generalizada de la siguiente manera

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A \quad \textit{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A),$$

es llamada la inversa core de A y es denotada por $A^{\oplus}$, donde P_A es el proyector ortogonal sobre el rango de A, es decir, $P_A = AA^{\dagger}$.

Una condición necesaria y suficiente para que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sea core invertible es que $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$.

La inversa core

O. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

En el trabajo anterior, los autores introdujeron una nueva inversa generalizada de la siguiente manera

Definición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A),$$

es llamada la inversa core de A y es denotada por $A^{\oplus}$, donde P_A es el proyector ortogonal sobre el rango de A, es decir, $P_A = AA^{\dagger}$.

Una condición necesaria y suficiente para que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sea core invertible es que $\text{Ind}(A) \leq 1$.

Las inversas core EP, BT y DMP

Tres generalizaciones de la inversa core fueron introducidas y estudiadas recientemente para matrices cuadradas de índice arbitrario.

Las inversas core EP, BT y DMP

Tres generalizaciones de la inversa core fueron introducidas y estudiadas recientemente para matrices cuadradas de índice arbitrario.

La única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$XAX = X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k),$$

es llamada la inversa core EP de A y es denotada por $A^{\textcircled{\dagger}}$.

Las inversas core EP, BT y DMP

Tres generalizaciones de la inversa core fueron introducidas y estudiadas recientemente para matrices cuadradas de índice arbitrario.

La única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$XAX = X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k),$$

es llamada la inversa core EP de A y es denotada por $A^{\textcircled{\dagger}}$.

La matriz $A^{\diamond} := (AP_A)^{\dagger}$ es llamada la inversa BT de A.

Las inversas core EP, BT y DMP

Tres generalizaciones de la inversa core fueron introducidas y estudiadas recientemente para matrices cuadradas de índice arbitrario.

La única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$XAX = X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k),$$

es llamada la inversa core EP de A y es denotada por $A^{\textcircled{\dagger}}$.

La matriz $A^{\diamond} := (AP_A)^{\dagger}$ es llamada la inversa BT de A.

La única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$XAX = X, \quad XA = A^dA \quad \text{y} \quad A^kX = A^kA^{\dagger},$$

es llamada la inversa DMP de A y es denotada por $A^{d,\dagger}$.

Motivación de este trabajo

O.Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

Motivación de este trabajo

O.Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

La inversa core de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A = AA^{\dagger} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A).$$

Motivación de este trabajo

O.Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

La inversa core de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A = AA^\dagger \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A).$$

K.M. Prasad, K.S. Mohana, *Core EP inverse*, Linear and Multilinear Algebra, 62 (3) (2014) 792-802.

Motivación de este trabajo

O.Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

La inversa core de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A = AA^\dagger \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A).$$

K.M. Prasad, K.S. Mohana, *Core EP inverse*, Linear and Multilinear Algebra, 62 (3) (2014) 792-802.

La inversa core EP de A es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$XAX = X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k).$$

Motivación de este trabajo

O.Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

La inversa core de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfaciendo

$$AX = P_A = AA^\dagger \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A).$$

K.M. Prasad, K.S. Mohana, *Core EP inverse*, Linear and Multilinear Algebra, 62 (3) (2014) 792-802.

La inversa core EP de A es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$XAX = X \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(X^*) = \mathcal{R}(A^k).$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que Ind$(A) = k$. Entonces $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la inversa core EP de A si y sólo si X satisface las condiciones

$$XA^{k+1} = A^k, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \qquad y \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A^k).$$

Antecedentes del Problema

X. Wang, *Core-EP decomposition and its applications*, Linear Algebra and its Applications, 508 (2016) 289-300.

Antecedentes del Problema

X. Wang, *Core-EP decomposition and its applications*, Linear Algebra and its Applications, 508 (2016) 289-300.

Teorema

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ admite una única descomposición de la forma

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad A_2 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*,$$

donde T es invertible con rk$(T) =$ rk(A^k), N es nilpotente con índice k y U es unitaria. Dicha representación es llamada la descomposición core EP de A.

Antecedentes del Problema

X. Wang, *Core-EP decomposition and its applications*, Linear Algebra and its Applications, 508 (2016) 289-300.

Teorema

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ admite una única descomposición de la forma

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad A_2 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*,$$

donde T es invertible con rk$(T) =$ rk(A^k), N es nilpotente con índice k y U es unitaria. Dicha representación es llamada la descomposición core EP de A.

Teorema

Sea $A = A_1 + A_2$ la descomposición core EP de A tal que Ind$(A) = k$. Entonces $A^{\textcircled{\dagger}} = A_1^{\#}$. Más aún,

$$A^{\textcircled{\dagger}} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Una nueva caracterización de la inversa core EP

Resultado Principal

D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, *Revisiting the core EP and its extension to rectangular matrices*, Quaestiones Mathematicae, to appear.

A continuación, damos una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea core EP invertible.

Resultado Principal

D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, *Revisiting the core EP and its extension to rectangular matrices*, Quaestiones Mathematicae, to appear.

A continuación, damos una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea core EP invertible.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que Ind$(A) = k$. Entonces $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la inversa core EP de A si y sólo si X satisface las condiciones

$$AX = P_{A^k} \quad \textit{y} \quad \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A^k).$$

Más aún, $X = (AP_{A^k})^\dagger$, donde $P_{A^k} = A^k(A^k)^\dagger$.

Propiedades de la inversa core EP

Es conocido que inversa core $A^{\textcircled{\#}}$ pertence a la clase $A\{1\}$. Es interesante preguntarse qué ocurre con la inversa core EP.

Propiedades de la inversa core EP

Es conocido que inversa core $A^{\oplus}$ pertence a la clase $A\{1\}$. Es interesante preguntarse qué ocurre con la inversa core EP.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $A^{\dagger} \in A\{1\}$,

(ii) *Ind*$(A) \leq 1$,

(iii) $A^{\diamond} \in A\{1\}$.

Más aún, en este caso, $A^{\dagger} = A^{\diamond} = A^{\oplus}$.

Propiedades de la inversa core EP

Es conocido que inversa core $A^{\textcircled{\#}}$ pertence a la clase $A\{1\}$. Es interesante preguntarse qué ocurre con la inversa core EP.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $A^{\textcircled{\dagger}} \in A\{1\}$,

(ii) *Ind*$(A) \leq 1$,

(iii) $A^{\diamond} \in A\{1\}$.

Más aún, en este caso, $A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\diamond} = A^{\textcircled{\#}}$.

Sin embargo, el hecho que $A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\diamond}$ no implica que $A \in A\{1\}$.

Propiedades de la inversa core EP

Es conocido que si Ind$(A) \leq 1$ entonces $(A^{\oplus})^{\oplus} = AP_A$ y $A^{\oplus}$ es necesariamente EP .

Propiedades de la inversa core EP

Es conocido que si Ind$(A) \leq 1$ entonces $(A^{\textcircled{\#}})^{\textcircled{\#}} = AP_A$ y $A^{\textcircled{\#}}$ es necesariamente EP .

A continuación veremos que la inversa core EP satisface las mismas propiedades.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que Ind$(A) = k$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas

(i) $A^{\textcircled{\dagger}}$ *es EP;*

(ii) $A(A^{\textcircled{\dagger}})^2 = A^{\textcircled{\dagger}}$*;*

(iii) $(A^{\textcircled{\dagger}})^{\textcircled{\dagger}} = AP_{A^k}$*;*

(iv) AP_{A^k} *es EP.*

Reprentación y cálculo de la inversa core EP

Forma canónica de la inversa core EP

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rango $r > 0$ admite la descomposición de Hartwig-Spindelböck dada por

Forma canónica de la inversa core EP

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rango $r > 0$ admite la descomposición de Hartwig-Spindelböck dada por

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

donde $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, $\Sigma =$ diag$(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2} \cdots, \sigma_t I_{r_t})$, σ_i son los valores singulares de A, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ y $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ satisfacen $KK^* + LL^* = I_r$.

Forma canónica de la inversa core EP

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de rango $r > 0$ admite la descomposición de Hartwig-Spindelböck dada por

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

donde $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, $\Sigma =$ diag$(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2} \cdots, \sigma_t I_{r_t})$, σ_i son los valores singulares de A, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ y $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ satisfacen $KK^* + LL^* = I_r$.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita en la forma de Hartwig-Spindelböck. Entonces

$$A^{\textcircled{\dagger}} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\textcircled{\dagger}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Forma canónica de la inversa core EP

En [2, Lemma 2] y [3, Theorem 2.5], se probó que

Forma canónica de la inversa core EP

En [2, Lemma 2] y [3, Theorem 2.5], se probó que

$$A^{\diamond} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad \text{y} \quad A^{d,\dagger} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

respectivamente.

Forma canónica de la inversa core EP

En [2, Lemma 2] y [3, Theorem 2.5], se probó que

$$A^{\diamond} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad \text{y} \quad A^{d,\dagger} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

respectivamente.

Corolario

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ escrita en la forma de Hartwig-Spindelböck. Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $A^{\textcircled{\dagger}} = A^{\diamond}$;

(ii) $A^{d,\dagger} = A^{\diamond}$;

(iii) ΣK *es EP.*

Más aún, en este caso, Ind$(A) \leq 2$.

Más propiedades de la inversa core EP

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que Ind*$(A) = k$. *Entonces*

(i) $AA^{\textcircled{\dagger}}$ *es un proyector ortogonal sobre* $\mathcal{R}(A^k)$.

(ii) $A^{\textcircled{\dagger}}A$ *es un proyector oblicuo sobre* $\mathcal{R}(A^k)$ *a lo largo de* $\mathcal{N}((A^{k+1})^*A)$.

Más propiedades de la inversa core EP

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que Ind*$(A) = k$. *Entonces*

(i) $AA^{\oplus}$ *es un proyector ortogonal sobre* $\mathcal{R}(A^k)$.

(ii) $A^{\oplus}A$ *es un proyector oblicuo sobre* $\mathcal{R}(A^k)$ *a lo largo de* $\mathcal{N}((A^{k+1})^* A)$.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

(i) A *es EP;*

(ii) $(A^{\oplus})^{\oplus} = A$;

(iii) $(A^{\oplus})^{\dagger} = A$;

(iv) $(A^{\dagger})^{\oplus} = A$;

(v) $AP_A = A$.

Más aún, en este caso, $AA^{\oplus} = A^{\oplus}A$ *y* $(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{\oplus}$.

O.M. Baksalary, G. Trenkler, *Core inverse of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 58 (6) (2010) 681-697.

O.M. Baksalary, G. Trenkler, *On a generalized core inverse*, Applied Mathematics & Compututation, 236 (2014) 450-457.

S.B. Malik, N. Thome, *On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index*, Applied Mathematics & Compututation, 226 (2014) 575-580.

K.M. Prasad, K.S. Mohana, *Core EP inverse*, Linear and Multilinear Algebra, 62 (3) (2014) 792-802.

X. Wang, *Core-EP decomposition and its applications*, Linear Algebra and its Applications, 508 (2016) 289-300.

Gracias!!!