Sobre la dimensión global fuerte de un álgebra

Claudia Chaio, Alfredo González Chaio, Isabel Pratti

Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro Junio, 2017. Bahía Blanca, Argentina.

Notaciones

- A un álgebra de artin.
- $\operatorname{mod} A$ la categoría de A-módulos finitamente generados a derecha;
- $\operatorname{proy} A$ la subcategoría llena de $\operatorname{mod} A$ cuyos objetos son los A-módulos proyectivos finitamente generados.

La categoría $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\, A)$

Consideramos $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\, A)$ es la subcategoría llena de $\mathbf{C}(\mathrm{mod}\, A)$ cuyos objetos son los complejos
X tales que: $X^i \in \mathrm{proy}\,\Lambda$ y, $X^i = 0$ si $i \notin \{1, \ldots, n-1, n\}$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

La categoría $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\, A)$

Consideramos $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\, A)$ es la subcategoría llena de $\mathbf{C}(\mathrm{mod}\, A)$ cuyos objetos son los complejos X tales que: $X^i \in \mathrm{proy}\, \Lambda$ y, $X^i = 0$ si $i \notin \{1, \ldots, n-1, n\}$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \longrightarrow 0 \longrightarrow$$

Denotamos un objeto en $\mathbf{C}_n(\mathrm{proy}\, A)$ por

$$X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$$

Las categorías $\mathbf{C_2}(\mathrm{proy}\, A)$ fueron introducidas por Raymundo Bautista en 2004.

En 2005, Bautista, Souto Salorio y Zuazua generalizaron estas categorías para $n > 2$.

Las categorías $\mathbf{C_2}(\operatorname{proy} A)$ fueron introducidas por Raymundo Bautista en 2004.

En 2005, Bautista, Souto Salorio y Zuazua generalizaron estas categorías para $n > 2$.

Los autores consideran estas categorías en orden de estudiar los triángulos de Auslander-Reiten en $\mathbf{D^b}(A)$ la categoría derivada acotada de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin.

Las categorías $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\, A)$ son Krull Schmidt, exactas, con suficientes objetos proyectivos, suficientes objetos inyectivos y de dimensión proyectiva finita.

Estas categorías tienen sucesiones de Auslander-Reiten.

En 2017 Chaio, Souto Salorio, – mostramos que el carcaj de Auslander-Reiten de las categorías $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\, A)$ puede ser construido con la técnica del tejido.

Dimensión global fuerte

Para un complejo $X \in \mathsf{K}^b(\mathrm{proy}\,\mathrm{A})$,

$$\cdots \to 0 \to 0 \to X^r \to X^{r+1} \to \cdots \to X^{s-1} \to X^s \to 0 \to 0 \cdots$$

con $X^r \neq 0$ y $X^s \neq 0$, se define la longitud de X como

Dimensión global fuerte

Para un complejo $X \in \mathsf{K}^b(\mathrm{proy}\,\mathrm{A})$,

$$\cdots \to 0 \to 0 \to X^r \to X^{r+1} \to \cdots \to X^{s-1} \to X^s \to 0 \to 0 \cdots$$

con $X^r \neq 0$ y $X^s \neq 0$, se define la longitud de X como

$$\ell(X) = s - r.$$

Dimensión global fuerte

Para un complejo $X \in \mathsf{K}^b(\mathrm{proy}\ \mathrm{A})$,

$$\cdots \to 0 \to 0 \to X^r \to X^{r+1} \to \cdots \to X^{s-1} \to X^s \to 0 \to 0 \cdots$$

con $X^r \neq 0$ y $X^s \neq 0$, se define la longitud de X como

$$\ell(X) = s - r.$$

La dimensión global fuerte de A:

$$s.gl.\mathrm{dim}\ A = \sup\{\ell(X) \mid X \in K^b(proy\ A) \text{ es indescomponible}\}.$$

El concepto de dimensión global fuerte fue introducida por Skowrońsky en 1987.

En 2010 Happel y Zacharia prueban que la dimensión global fuerte de un álgebra es finita si y solo si ésta es derivadamente equivalente a un álgebra hereditaria.

Una categoría $\mathcal{C}$ es de representación finita si tiene un número finito de objetos indescomponibles, salvo isomorfismos.

Categorías de tipo de representación finito

Una categoría $\mathcal{C}$ es de representación finita si tiene un número finito de objetos indescomponibles, salvo isomorfismos.

Bautista probo que A es representation-discreta si y solo si para cada $n \geq 2$ se tiene que $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\ A)$ es de tipo de representación finita.

Teorema: *Sea A un álgebra de artin y $s.gl.\dim \mathrm{A} = \eta < \infty$.*
Entonces:
Para cada $n \geq 2$, la categoría $\mathbf{C_n}(\mathrm{proy}\ A)$ es de tipo de representación finita si y solo si $\mathbf{C}_{\eta+\mathbf{1}}(\mathrm{proy}\ A)$ es de tipo de representación finita.

Ejemplo

Consideramos el álgebra de caminos dada por el carcaj Q_A

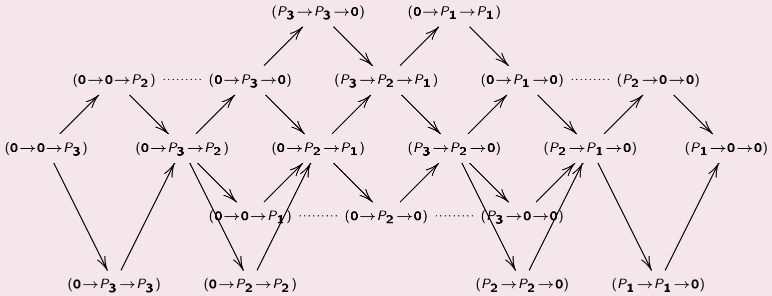
$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

con $\beta\alpha = 0$.

Tenemos que dimensión global fuerte de A es 2, pues A es casi inclinada.

Ejemplo

El carcaj de Auslander-Reiten $\mathsf{C}_3(\mathrm{proy}\ \mathrm{A})$ *es el siguiente:*



Ya que $\mathsf{C}_3(\mathrm{proy}\ \mathrm{A})$ *es de tipo de representación finito, entonces inferimos que A es representación-discreta.*

Proposición: *Sea A un álgebra tal que* $\mathrm{s.gl.dim}\, A$ *es finita. Sea X un complejo indescomponible A_n-periódico en* $\mathbf{C}_n(\mathrm{proy\ A})$ *de rango m, con* $X, A_n(X), \ldots, A_n^{m-1}(X)$ *en* $\mathcal{T}$. *Sea Γ una componente de* $\Gamma_{\mathbf{C}_n(\mathrm{proy\ A})}$ *y* $X \in \Gamma$. *Entonces, existen infinitos complejos indescomponibles en Γ.*

Más aún, todo complejo indescomponible no-proyectivo en Γ forma un tubo en $\Gamma_{\mathbf{K}^{-,b}(\mathrm{proy\ A})}$.

Ejemplo

Sea A el álgebra dada por el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & & & 6 \\
& 3 \arrow[r, "\alpha"] & 4 \arrow[r, "\beta"] & 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] & & & & 7
\end{tikzcd}
$$

con $\beta\alpha = 0$. *Podemos ver que es casi-inclinada por lo que* *s.gl.dim* $A = 2$.

Ejemplo

En $\Gamma_{\mathbf{C}_5(\mathrm{proy}\ A)}$ *tenemos la siguiente componente infinita:*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & 0{,}5{,}5{,}0{,}0 \arrow[dr] & & 0{,}0{,}3{,}3{,}0 \arrow[dr] & & & \\
0{,}0{,}4{,}0{,}0 \arrow[dr] \arrow[d, dash, dashed] \arrow[rr, dotted, dash] & & 0{,}67{,}5{,}0{,}0 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, dash] & & 0{,}5{,}4{,}3{,}0 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, dash] & & 0{,}0{,}3{,}21{,}0 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, dash] & & 0{,}0{,}4{,}0{,}0 \arrow[d, dash, dashed] \\
{} & \bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & {}
\end{tikzcd}
$$

Más aún, tenemos que $\mathbf{C}_3(\mathrm{proy}\ A)$ *es de tipo de representación infinita.*

Teorema: *Sea* $n \geq 2$ *y asumimos que hay un slice de tipo Euclideano* Σ *en* $\mathbf{C}_n(\mathrm{proy}\ \mathrm{A})$*. Entonces:*
El slice Σ *tiene un preproyectivo y un preinyectivo si y solo si* $\mathbf{C}_n(\mathrm{proy}\ \mathrm{A})$ *es de representación-finita.*

Teorema: *Sea A el álgebra dada por el carcaj*

$$Q_{H_n} \xrightarrow{\alpha_n} a_n \xrightarrow{\beta_n} Q_{H_{n-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_{H_1} \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\beta_1} Q_{H_0}$$

con H^i un álgebra hereditaria, $a_i \in (Q_A)_0$, y $\beta_i \alpha_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$.

$$\operatorname{s.gl.dim} A = n + 1 = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{s.gl.dim} H_i$$

Sea A el álgebra dada por el carcaj

$$Q_{H_n} \xrightarrow{\alpha_n} a_n \xrightarrow{\beta_n} Q_{H_{n-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_{H_1} \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\beta_1} Q_{H_0}$$

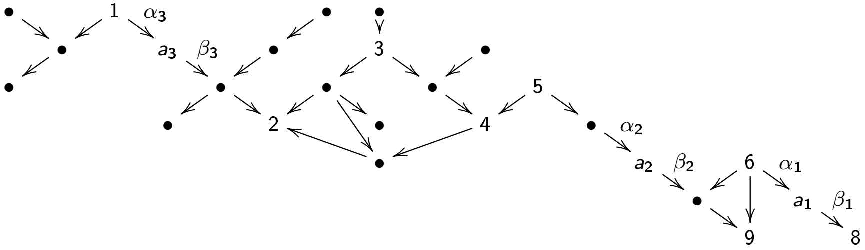
Sea X un complejo indescomponible de longitud maximal en $\mathbf{C}(\mathrm{proy}\, A)$. Entonces,

$$X = 0 \to H_0^1 \to H_0^2 \oplus P_{a_1}^{m_1^2} \oplus H_1^2 \to \cdots \to H_{n-1}^{n+1} \oplus P_{a_n}^{m_n^{n+1}} \oplus H_n^{n+1} \to H_n^{n+2} \to 0$$

donde $H_0^1 \neq 0, m_i \geq 1$ y $H_n^{n+2} \neq 0$.

Ejemplo

Sea A el álgebra dada por el carcaj:



con $\beta_1\alpha_1 = \beta_2\alpha_2 = \beta_3\alpha_3 = 0$. El complejo

$$P_8 \longrightarrow P_{a_1} \oplus P_9 \longrightarrow P_6 \oplus P_{a_2} \oplus P_4 \oplus P_2 \longrightarrow P_{a_3} \oplus P_3 \oplus P_5 \longrightarrow P_1$$

es indescomponible y sabemos que $\mathrm{s.gl.dim}\, A = 4$.

MUCHAS GRACIAS