Sobre el espectro de grafos de arreglos

Araujo J. O. - Natale M.

UNICEN

Grafo de Arreglos

- Sean $r, k, n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq k \leq n$ y $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

Grafo de Arreglos

- Sean $r, k, n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq k \leq n$ y $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

- Una $k-$permutación v es una función inyectiva

$$v : I_k \to I_n$$

Grafo de Arreglos

- Sean $r, k, n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq k \leq n$ y $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

- Una $k-$permutación v es una función inyectiva

$$v : I_k \to I_n$$

- Sea $V(n, k)$ el conjunto de $k-$permutaciones.

- Sean $r, k, n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq k \leq n$ y $I_n = \{1, \ldots, n\}$.
- Una $k-$permutación v es una función inyectiva

$$v : I_k \to I_n$$

- Sea $V(n, k)$ el conjunto de $k-$permutaciones.
- Grafo de Arreglos $A(n, k, r)$:

Grafo de Arreglos

- Sean $r, k, n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq k \leq n$ y $I_n = \{1, \ldots, n\}$.
- Una $k-$permutación v es una función inyectiva

$$v : I_k \to I_n$$

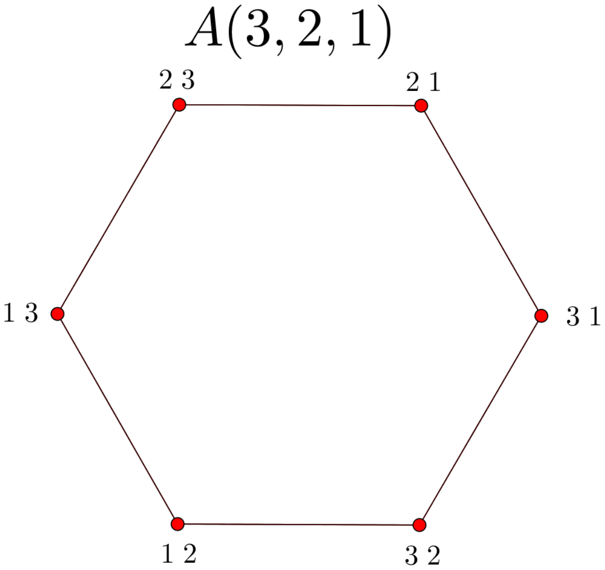
- Sea $V(n, k)$ el conjunto de $k-$permutaciones.
- Grafo de Arreglos $A(n, k, r)$:
  - $V(n, k)$ es el conjunto de vértices.

- Sean $r, k, n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq k \leq n$ y $I_n = \{1, \ldots, n\}$.
- Una $k-$permutación v es una función inyectiva

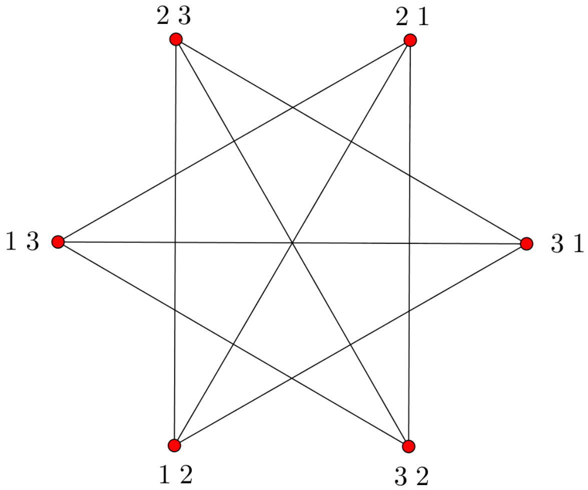
$$v : I_k \to I_n$$

- Sea $V(n, k)$ el conjunto de $k-$permutaciones.
- Grafo de Arreglos $A(n, k, r)$:
  - $V(n, k)$ es el conjunto de vértices.
  - $v \sim w$ *si como funciones difieren en exactamente* r elementos de I_k.

Grafo de Arreglos

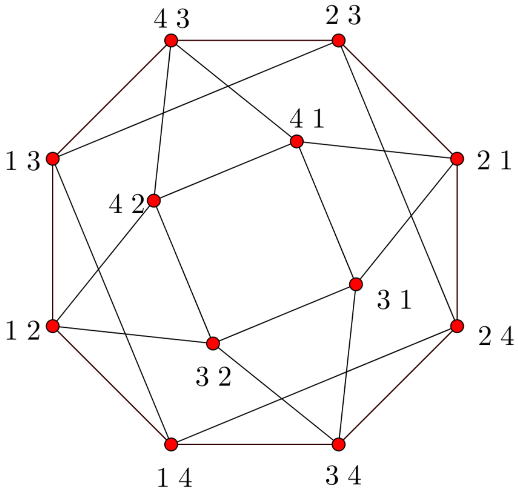


$$A(3, 2, 2)$$



Grafo de Arreglos

$$A(4,2,1)$$



- Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial complejo con base $V(n, k)$.

Grafo de Arreglos

- Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial complejo con base $V(n,k)$.
- El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ actúa naturalmente en $V(n,k)$: para $\pi \in \mathfrak{S}_n$ y $v \in V(n,k)$
$$\pi \cdot v = \pi \circ v$$

Grafo de Arreglos

- Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial complejo con base $V(n, k)$.
- El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ actúa naturalmente en $V(n, k)$: para $\pi \in \mathfrak{S}_n$ y $v \in V(n, k)$

$$\pi \cdot v = \pi \circ v$$

- Esto induce una acción en el espacio de vértices $\mathbb{V}$, es decir $\mathbb{V}$ es una representación de $\mathfrak{S}_n$.

Grafo de Arreglos

- Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial complejo con base $V(n,k)$.

- El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ actúa naturalmente en $V(n,k)$: para $\pi \in \mathfrak{S}_n$ y $v \in V(n,k)$
$$\pi \cdot v = \pi \circ v$$

- Esto induce una acción en el espacio de vértices $\mathbb{V}$, es decir $\mathbb{V}$ es una representación de $\mathfrak{S}_n$.

- Definimos el operador lineal Υ_r en el espacio $\mathbb{V}$ como
$$\Upsilon_r : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad / \quad \Upsilon_r(v) = \sum_{\omega \sim v}$$

Grafo de Arreglos

- Sea $\mathbb{V}$ el espacio vectorial complejo con base $V(n,k)$.
- El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ actúa naturalmente en $V(n,k)$: para $\pi \in \mathfrak{S}_n$ y $v \in V(n,k)$
$$\pi \cdot v = \pi \circ v$$
- Esto induce una acción en el espacio de vértices $\mathbb{V}$, es decir $\mathbb{V}$ es una representación de $\mathfrak{S}_n$.
- Definimos el operador lineal Υ_r en el espacio $\mathbb{V}$ como
$$\Upsilon_r : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad / \quad \Upsilon_r(v) = \sum_{\omega \sim v}$$
- La matriz del operador Υ_r en la base de vértices es la matriz de adyacencia de $A(n,k,r)$.

Resultados Previos

- En 2013 Chen, Ghorbani y Wong:

Resultados Previos

- En 2013 Chen, Ghorbani y Wong:
  - Estudian el espectro del grafo de arreglo $A(n, k, 1)$ para valores pequeños de k.

Resultados Previos

- En 2013 Chen, Ghorbani y Wong:
  - Estudian el espectro del grafo de arreglo $A\left(n,k,1\right)$ para valores pequeños de k.
  - Establecen que el espectro del grafo de Johnson $J\left(n.k,1\right)$ forma parte del espectro del grafo $A\left(n,k,1\right)$.

Resultados Previos

- En 2013 Chen, Ghorbani y Wong:
  - Estudian el espectro del grafo de arreglo $A(n, k, 1)$ para valores pequeños de k.
  - Establecen que el espectro del grafo de Johnson $J(n.k, 1)$ forma parte del espectro del grafo $A(n, k, 1)$.
  - Establecen que $-k$ es el primer valor del espectro de $A(n, k, 1)$.

Resultados Previos

- En 2013 Chen, Ghorbani y Wong:
  - Estudian el espectro del grafo de arreglo $A(n, k, 1)$ para valores pequeños de k.
  - Establecen que el espectro del grafo de Johnson $J(n.k, 1)$ forma parte del espectro del grafo $A(n, k, 1)$.
  - Establecen que $-k$ es el primer valor del espectro de $A(n, k, 1)$.
- En 2014 Chen, Ghorbani y Wong prueban que el espectro del grafo de arreglo $A(n, k, 1)$ es entero, a partir de relacionar éste con el espectro de ciertos grafos de Cayley.

Resultados Previos

- En 2013 Chen, Ghorbani y Wong:
  - Estudian el espectro del grafo de arreglo $A(n, k, 1)$ para valores pequeños de k.
  - Establecen que el espectro del grafo de Johnson $J(n.k, 1)$ forma parte del espectro del grafo $A(n, k, 1)$.
  - Establecen que $-k$ es el primer valor del espectro de $A(n, k, 1)$.
- En 2014 Chen, Ghorbani y Wong prueban que el espectro del grafo de arreglo $A(n, k, 1)$ es entero, a partir de relacionar éste con el espectro de ciertos grafos de Cayley.
- En 2015 Araujo y Bratten determinan el espectro del grafo de Johnson $J(n, k, r)$ utilizando la teoría de representaciones del Grupo Simétrico.

Resultados Previos

- En 2016 Araujo y Bratten describen el espectro del grafo $A(n, k, 1)$ utilizando la teoría de representaciones del Grupo Simétrico.

Resultados Previos

- En 2016 Araujo y Bratten describen el espectro del grafo $A(n, k, 1)$ utilizando la teoría de representaciones del Grupo Simétrico.

Theorem

Sean τ_n, τ_k transposiciones en $\mathfrak{S}_n$ y $\mathfrak{S}_k$ respectivamente. El espectro de $A\left(n, k, 1\right)$ es:

$$\binom{n}{2}\frac{\chi_\mu\left(\tau_n\right)}{\chi_\mu\left(1\right)} - \binom{k}{2}\frac{\chi_\lambda\left(\tau_k\right)}{\chi_\lambda\left(1\right)} - \binom{n-k}{2}$$

donde $\lambda \vdash k$, $\mu \vdash n$ tales que $\mu \prec \lambda$.

Espectro de A(n,k,2)

- Objetivo: Determinar el espectro del grafo $A(n, k, 2)$.

Espectro de A(n,k,2)

- Objetivo: Determinar el espectro del grafo $A(n, k, 2)$.
- Buscamos expresar el operador Υ_2 del grafo $A(n, k, 2)$ en términos de:

- Objetivo: Determinar el espectro del grafo $A(n, k, 2)$.
- Buscamos expresar el operador Υ_2 del grafo $A(n, k, 2)$ en términos de:
  - El operador Υ_1 asociado al grafo $A(n, k, 1)$.

Espectro de A(n,k,2)

- Objetivo: Determinar el espectro del grafo $A(n, k, 2)$.
- Buscamos expresar el operador Υ_2 del grafo $A(n, k, 2)$ en términos de:
  - El operador Υ_1 asociado al grafo $A(n, k, 1)$.
  - Suma de clases de conjugación en el grupo $\mathfrak{S}_n$.

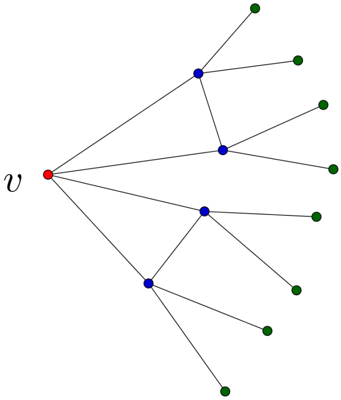
Espectro de A(n,k,2)

- Objetivo: Determinar el espectro del grafo $A(n, k, 2)$.
- Buscamos expresar el operador Υ_2 del grafo $A(n, k, 2)$ en términos de:
  - El operador Υ_1 asociado al grafo $A(n, k, 1)$.
  - Suma de clases de conjugación en el grupo $\mathfrak{S}_n$.
  - Suma de clases de conjugación en subgrupos del tipo $\mathfrak{S}_k$.

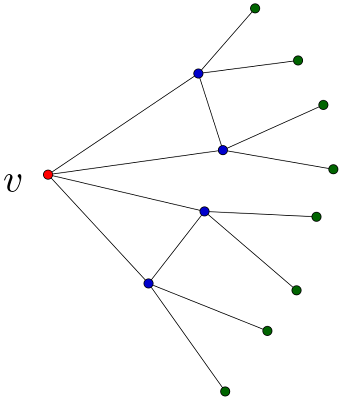
Espectro de A(n,k,2)

- Objetivo: Determinar el espectro del grafo $A(n, k, 2)$.
- Buscamos expresar el operador Υ_2 del grafo $A(n, k, 2)$ en términos de:
  - El operador Υ_1 asociado al grafo $A(n, k, 1)$.
  - Suma de clases de conjugación en el grupo $\mathfrak{S}_n$.
  - Suma de clases de conjugación en subgrupos del tipo $\mathfrak{S}_k$.
- Estudiamos el operador Υ_1^2.

Espectro de A(n,k,2)



Espectro de A(n,k,2)



$$\Upsilon_1^2 = k\,(n-k)\,I + (n-k-1)\,\Upsilon_1 + 2\Upsilon_2 - \sigma_3 + \sigma_3^{3,0} + \sigma_3^{1,2} + \sigma_3^{0,3} - 2\sigma_2^{2,0}$$

- Se sabe que

$$\sigma_3^{1,2} = (n-k-1)\,\Upsilon_1$$

Espectro de A(n,k,2)

- Se sabe que

$$\sigma_3^{1,2} = (n-k-1)\,\Upsilon_1$$

- Restringiendo Υ_1^2 a una componente isotípica de $\mathfrak{S}_k$ con caracter χ_λ, tenemos:

$$\sigma_3^{3,0} = 2\binom{k}{3}\frac{\chi_\lambda(\sigma_k)}{\chi_\lambda(1)}I \qquad \sigma_3^{0,3} = 2\binom{n-k}{3}I \qquad \sigma_2^{2,0} = \binom{k}{2}\frac{\chi_\lambda(\tau_k)}{\chi_\lambda(1)}I$$

Espectro de A(n,k,2)

- Se sabe que

$$\sigma_3^{1,2} = (n-k-1)\,\Upsilon_1$$

- Restringiendo Υ_1^2 a una componente isotípica de $\mathfrak{S}_k$ con caracter χ_λ, tenemos:

$$\sigma_3^{3,0} = 2\binom{k}{3}\frac{\chi_\lambda(\sigma_k)}{\chi_\lambda(1)}I \qquad \sigma_3^{0,3} = 2\binom{n-k}{3}I \qquad \sigma_2^{2,0} = \binom{k}{2}\frac{\chi_\lambda(\tau_k)}{\chi_\lambda(1)}I$$

- En una componente irreducible de $\mathfrak{S}_n$ con caracter χ_μ, con $\lambda \prec \mu$, tenemos:

$$\sigma_3 = 2\binom{n}{2}\frac{\chi_\mu(\sigma_n)}{\chi_\mu(1)}$$

- Luego

$$\mathrm{Y}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Y}_1^2 - (n-k-1)\,\mathrm{Y}_1 + \beta I$$

donde

$$\beta = \left[\binom{n}{2} \frac{\chi_\mu(123)}{\chi_\mu(1)} + \binom{k}{2} \frac{\chi_\lambda(12)}{\chi_\lambda(1)} - \binom{k}{3} \frac{\chi_\lambda(123)}{\chi_\lambda(1)} - \binom{n-k}{3} - \frac{k(n-k)}{2} \right]$$

Espectro de A(n,k,2)

Theorem

Sean τ_n, τ_k transposiciones en $\mathfrak{S}_n$ y $\mathfrak{S}_k$ respectivamente y sean σ_n, σ_k triciclos en $\mathfrak{S}_n$ y $\mathfrak{S}_k$ respectivamente. Entonces el espectro del grafo $A(n,k,2)$ está dado por:

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n}{2}\frac{\chi_\mu(\tau_n)}{\chi_\mu(1)} - \binom{k}{2}\frac{\chi_\lambda(\tau_k)}{\chi_\lambda(1)} - \binom{n-k}{2}\right]^2 -$$

$$(n-k-1)\left[\binom{n}{2}\frac{\chi_\mu(\tau_n)}{\chi_\mu(1)} - \binom{k}{2}\frac{\chi_\lambda(\tau_k)}{\chi_\lambda(1)} - \binom{n-k}{2}\right] +$$

$$\binom{n}{2}\frac{\chi_\mu(\sigma_n)}{\chi_\mu(1)} + \binom{k}{2}\frac{\chi_\lambda(\tau_k)}{\chi_\lambda(1)} - \binom{k}{3}\frac{\chi_\lambda(\sigma_k)}{\chi_\lambda(1)}I - \binom{n-k}{3}I - \frac{k(n-k)}{2}$$

donde λ es una partición de k, μ es una partición de n tales que $\mu_i' \leq \lambda_i' + 1$, siendo μ' y λ' las particiones conjugadas de μ y λ respectivamente.

Próximo Trabajo

- Obtener el espectro de $A(n, k, r)$ para cualquier r utilizando las técnicas análogas a las utilizadas en $A(n, k, 2)$.

Próximo Trabajo

- Obtener el espectro de $A\left(n,k,r\right)$ para cualquier r utilizando las técnicas análogas a las utilizadas en $A\left(n,k,2\right)$.

Próximo Trabajo

- Obtener el espectro de $A(n,k,r)$ para cualquier r utilizando las técnicas análogas a las utilizadas en $A(n,k,2)$.

Muchas Gracias!!!!