Extensiones triviales de álgebras monomiales. Aplicación al caso gentil y su relación con las álgebras de grafo de Brauer.

M. Andrea Gatica (1), M. Valeria Hernández (2), M. Inés Platzeck (1)
(1) Universidad Nacional del Sur
(2) Universidad Nacional de La Pampa

1 de junio de 2017

OBJETIVOS:

OBJETIVOS:

- Describir las extensiones triviales de álgebras monomiales.

OBJETIVOS:

- Describir las extensiones triviales de álgebras monomiales.
- Considerar el caso particular de las álgebras gentiles.

OBJETIVOS:

- Describir las extensiones triviales de álgebras monomiales.
- Considerar el caso particular de las álgebras gentiles.
- Analizar en qué casos $B = kQ_B/I_B$ es la extensión trivial de un álgebra gentil.

OBJETIVOS:

- Describir las extensiones triviales de álgebras monomiales.
- Considerar el caso particular de las álgebras gentiles.
- Analizar en qué casos $B = kQ_B/I_B$ es la extensión trivial de un álgebra gentil.
- Describir la relación entre las extensiones triviales de álgebras gentiles y las álgebras de grafo de Brauer.

Definición

Se define la ***extensión trivial*** de un álgebra A como el producto cartesiano $A \times DA$, con el producto: $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$. Un álgebra A se denomina ***monomial*** si puede representarse de la forma $A = kQ_A/I_A$, con I_A un ideal admisible generado por caminos.

Extensión trivial de un álgebra monomial.

Definición

Se define la ***extensión trivial*** de un álgebra A como el producto cartesiano $A \times DA$, con el producto: $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$.
Un álgebra A se denomina ***monomial*** si puede representarse de la forma $A = kQ_A/I_A$, con I_A un ideal admisible generado por caminos.

Construcción del carcaj de $T(A)$ [FP]:

Extensión trivial de un álgebra monomial.

Definición

Se define la ***extensión trivial*** de un álgebra A como el producto cartesiano $A \times DA$, con el producto: $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$. Un álgebra A se denomina ***monomial*** si puede representarse de la forma $A = kQ_A/I_A$, con I_A un ideal admisible generado por caminos.

Construcción del carcaj de $T(A)$ [FP]:
vértices de $Q_{T(A)}$ = vértices de Q_A.

Extensión trivial de un álgebra monomial.

Definición

Se define la ***extensión trivial*** de un álgebra A como el producto cartesiano $A \times DA$, con el producto: $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$.
Un álgebra A se denomina ***monomial*** si puede representarse de la forma $A = kQ_A/I_A$, con I_A un ideal admisible generado por caminos.

Construcción del carcaj de $T(A)$ [FP]:
vértices de $Q_{T(A)}$ = vértices de Q_A.
flechas de $Q_{T(A)}$ = flechas de $Q_A \cup \{\beta_{p_1}, \cdots, \beta_{p_r}\}$: una flecha β_{p_i} por cada camino maximal no nulo de Q_A, en sentido contrario al camino p_i.

Definición

Un ciclo se dice ***elemental*** si es de la forma $C = p_i\beta_{p_i}$ o una permutación de este.

Dado q un camino contenido en un ciclo elemental C, de longitud menor o igual que la longitud de C. Si $q = C$, el ***suplemento*** de q en C es el camino trivial $e_{s(q)}$; en otro caso, es el camino formado por las flechas restantes de C.

Teorema

Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra de dimensión finita, donde I_A está generado por caminos. Sea I' el ideal generado por:

(i) los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $\mu - \mu'$, donde μ , μ' son caminos diferentes de $kQ_{T(A)}$ con un suplemento común γ en ciclos elementales C y C' respectivamente.

Entonces I' es admisible y $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

Extensión trivial de un álgebra monomial.

Teorema

Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra de dimensión finita, donde I_A está generado por caminos. Sea I' el ideal generado por:

(i) los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $\mu - \mu'$, donde μ , μ' son caminos diferentes de $kQ_{T(A)}$ con un suplemento común γ en ciclos elementales C y C' respectivamente.

Entonces I' es admisible y $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

Observación

C es un ciclo elemental $\Leftrightarrow$ C es un ciclo no nulo maximal en $T(A)$

Teorema

Sea $A = kQ_A/I_A$ una k- álgebra gentil. Sea I' el ideal generado por:

(i) Los caminos que no están contenidos en un ciclo elemental y

(ii) los elementos de la forma $C - C'$, donde C y C' son ciclos elementales que comienzan en un mismo vértice de $Q_{T(A)}$.

Entonces I' es admisible y $T(A) \simeq kQ_{T(A)}/I'$.

Extensión trivial de un álgebra gentil.

$B = T(A)$
El carcaj de la extensión trivial de un álgebra gentil satisface las siguientes propiedades:

Extensión trivial de un álgebra gentil.

$B = T(A)$
El carcaj de la extensión trivial de un álgebra gentil satisface las siguientes propiedades:

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.

Extensión trivial de un álgebra gentil.

$B = T(A)$
El carcaj de la extensión trivial de un álgebra gentil satisface las siguientes propiedades:

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.

(T2) Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B está contenido en un único ciclo maximal en B, a menos de permutaciones.

Extensión trivial de un álgebra gentil.

$B = T(A)$
El carcaj de la extensión trivial de un álgebra gentil satisface las siguientes propiedades:

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.

(T2) Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B está contenido en un único ciclo maximal en B, a menos de permutaciones.

(T3) Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kQ_B maximales en B para cualquier vértice j de Q_B. Si hay dos, son iguales en B.

Extensión trivial de un álgebra gentil.

$B = T(A)$
El carcaj de la extensión trivial de un álgebra gentil satisface las siguientes propiedades:

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.

(T2) Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B está contenido en un único ciclo maximal en B, a menos de permutaciones.

(T3) Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kQ_B maximales en B para cualquier vértice j de Q_B. Si hay dos, son iguales en B.

(T4) Si hay un ciclo $\gamma = \alpha_s \cdots \alpha_1$ en kQ_B de j a j que es no nulo y no maximal en B, entonces $\overline{\alpha_1 \alpha_s} = 0$ en B y $\dim_k \mathrm{End}_B(P_j) = 4$.

Extensión trivial de un álgebra gentil.

Teorema

Sea $B = kQ_B/I_B$. Entonces, son equivalentes:

(i) B es la extensión trivial de un álgebra gentil.

(ii) B satisface las condiciones

(T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.

(T2) Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B está contenido en un único ciclo maximal en B, a menos de permutaciones.

(T3) Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kQ_B maximales en B para cualquier vértice j de Q_B. Si hay dos, son iguales en B.

(T4) Si hay un ciclo $\gamma = \alpha_s \cdots \alpha_1$ en kQ_B de j a j que es no nulo y no maximal en B, entonces $\overline{\alpha_1 \alpha_s} = 0$ en B y $\dim_k \mathrm{End}_B(P_j) = 4$.

Teorema

Sea $B = kQ_B/I_B$ una k - álgebra de dimensión finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) B es un álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno en todos los vértices del grafo de Brauer asociado.

(ii) B satisface las condiciones

- (T1) Toda permutación de un ciclo maximal en B es un ciclo maximal en B.
- (T2) Todo camino no trivial de kQ_B y no nulo en B está contenido en un único ciclo maximal en B, a menos de permutaciones.
- (T3) Hay a lo sumo 2 ciclos distintos de j a j en kQ_B maximales en B para cualquier vértice j de Q_B. Si hay dos, son iguales en B.
- (T4) Si hay un ciclo $\gamma = \alpha_s \cdots \alpha_1$ en kQ_B de j a j que es no nulo y no maximal en B, entonces $\overline{\alpha_1 \alpha_s} = 0$ en B y $\dim_k \mathrm{End}_B(P_j) = 4$.

Teorema

Sea $B = kQ_B/I_B$ una k - álgebra de dimensión finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) B es la extensión trivial de un álgebra gentil.

(ii) B satisface las condiciones $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$.

(iii) B es un álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno en todos los vértices del grafo de Brauer asociado.

Teorema

Sea $B = kQ_B/I_B$ una k - álgebra de dimensión finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) B es la extensión trivial de un álgebra gentil.

(ii) B satisface las condiciones $(T1)$, $(T2)$, $(T3)$ y $(T4)$.

(iii) B es un álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno en todos los vértices del grafo de Brauer asociado.

Corolario[Schroll]

B es un álgebra de grafo de Brauer con multiplicidad uno en todos los vértices del grafo de Brauer asociado si y sólo si existe un álgebra gentil A tal que $T(A) = B$.

¡Muchas gracias!