Multiplicar por 2 y por 3

Pablo Shmerkin

Departmento de Matemática y Estadística
Universidad T. Di Tella y CONICET

Bahia Blanca, 21.09.2016

Iterar e iterar

Sea X un espacio y $T : X \to X$ una transformación. En términos muy generales, el área de sistemas dinámicos estudia las órbitas

$$\{x, T(x), T(T(x)), T(T(T(x))), T(T(T(T(x)))), \ldots\}$$

Escribimos $T^n = T \circ \cdots \circ T$. El interés está principalmente en el comportamiento estadístico de la sucesión $\{T^n(x)\}$ cuando $n \to \infty$.

Iterar e iterar

Sea X un espacio y $T : X \to X$ una transformación. En términos muy generales, el área de sistemas dinámicos estudia las órbitas

$$\{x, T(x), T(T(x)), T(T(T(x))), T(T(T(T(x)))), \ldots\}$$

Escribimos $T^n = T \circ \cdots \circ T$. El interés está principalmente en el comportamiento estadístico de la sucesión $\{T^n(x)\}$ cuando $n \to \infty$.

Multiplicar por 3, aburridamente

Primer ejemplo: $X = \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$. Entonces:

- Si $x > 0$, entonces $T^n(x) \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.
- Si $x = 0$, entonces $T^n(x) = 0$ para todo n.
- Si $x < 0$, entonces $T^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Aburrido ☹

Multiplicar por 3, aburridamente

Primer ejemplo: $X = \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$. Entonces:

- Si $x > 0$, entonces $T^n(x) \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.
- Si $x = 0$, entonces $T^n(x) = 0$ para todo n.
- Si $x < 0$, entonces $T^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Aburrido ☹

Multiplicar por 3, aburridamente

Primer ejemplo: $X = \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$. Entonces:

- Si $x > 0$, entonces $T^n(x) \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.
- Si $x = 0$, entonces $T^n(x) = 0$ para todo n.
- Si $x < 0$, entonces $T^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Aburrido ☹

Multiplicar por 3, aburridamente

Primer ejemplo: $X = \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$. Entonces:

- Si $x > 0$, entonces $T^n(x) \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.
- Si $x = 0$, entonces $T^n(x) = 0$ para todo n.
- Si $x < 0$, entonces $T^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Aburrido ☹

Multiplicar por 3, aburridamente

Primer ejemplo: $X = \mathbb{R}$, $T(x) = 3x$. Entonces:

- Si $x > 0$, entonces $T^n(x) \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.
- Si $x = 0$, entonces $T^n(x) = 0$ para todo n.
- Si $x < 0$, entonces $T^n(x) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Aburrido ☹

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0, 1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0,1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0,1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0, 1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0,1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0,1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0,1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, divertidamente

Segundo ejemplo: $X = [0, 1)$, $T_3(x) = 3x \bmod 1$ (multiplicar por 3 en el **círculo**). Ahora:

1. Si x es racional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es finita (y eventualmente periódica). Por ej.:
   - $\{1/6, 1/2, 1/2, \ldots\}$.
   - $\{1/5, 3/5, 4/5, 2/5, 1/5, \ldots\}$.
2. Si x es irracional, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no tiene repeticiones, por lo que es infinita.
3. ¿Cuáles son los puntos de acumulación de $(T_3^n(x))$ cuando x es irracional? (ω-limit set).
4. Si $E = E(x)$ es el conjunto de puntos de acumulación, entonces $T_3(E) \subset E$: E es T_3-invariante (e infinito).

☺

Multiplicar por 3, simbólicamente

Podemos entender la acción de T_3 usando expansiones en base 3: si

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}, \quad \text{entonces}$$
$$T_3 x = 0.x_2 x_3 x_4 \ldots .$$

Formalmente: sean $X = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, y $T : X \to X$ el shift. Entonces la "proyección" $\pi : X \to [0,1)$, dada por la expansión ternaria es una aplicación factor:

$$T_3 \pi = \pi T.$$

T_3 es "casi lo mismo", pero no del todo porque π no es biyectiva (pero casi: hay numerables puntos racionales con dos expansiones).

Multiplicar por 3, simbólicamente

Podemos entender la acción de T_3 usando expansiones en base 3: si

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}, \quad \text{entonces}$$
$$T_3 x = 0.x_2x_3x_4\ldots.$$

Formalmente: sean $X = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, y $T : X \to X$ el shift. Entonces la "proyección" $\pi : X \to [0,1)$, dada por la expansión ternaria es una aplicación factor:

$$T_3\pi = \pi T.$$

T_3 es "casi lo mismo", pero no del todo porque π no es biyectiva (pero casi: hay numerables puntos racionales con dos expansiones).

Multiplicar por 3, simbólicamente

Podemos entender la acción de T_3 usando expansiones en base 3: si

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 3^{-n}, \quad \text{entonces}$$
$$T_3 x = 0.x_2x_3x_4\ldots.$$

Formalmente: sean $X = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, y $T : X \to X$ el shift. Entonces la "proyección" $\pi : X \to [0,1)$, dada por la expansión ternaria es una aplicación factor:

$$T_3\pi = \pi T.$$

T_3 es "casi lo mismo", pero no del todo porque π no es biyectiva (pero casi: hay numerables puntos racionales con dos expansiones).

Multiplicar por 3, densa y normalmente

1. Si $x = 0,01200010210111220212200 0\ldots$, es fácil ver que la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es densa. ¿Siempre es densa? ¿Casi siempre?
2. Es fácil ver que para casi todo $x \in [0,1)$, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es densa. Aun más: casi todo x es normal en base 3: en la expansión ternaria de 3, cada bloque ternario $(a_1 \ldots a_k)$ aparece con la frecuencia "correcta": 3^{-k}.
3. Si $x = 0,0200022022000\ldots$, entonces la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no es densa: está contenida en el ternario de Cantor C. De hecho, es densa en C (el conjunto de Cantor C es T_3-invariante).

Multiplicar por 3, densa y normalmente

1. Si $x = 0,0120001021011122021220000\ldots$, es fácil ver que la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es densa. ¿Siempre es densa? ¿Casi siempre?
2. Es fácil ver que para casi todo $x \in [0,1)$, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es densa. Aun más: casi todo x es normal en base 3: en la expansión ternaria de 3, cada bloque ternario $(a_1 \ldots a_k)$ aparece con la frecuencia "correcta": 3^{-k}.
3. Si $x = 0,0200022022000\ldots$, entonces la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no es densa: está contenida en el ternario de Cantor C. De hecho, es densa en C (el conjunto de Cantor C es T_3-invariante).

Multiplicar por 3, densa y normalmente

1. Si $x = 0,0120001021011122021220 00\ldots$, es fácil ver que la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es densa. ¿Siempre es densa? ¿Casi siempre?
2. Es fácil ver que para casi todo $x \in [0,1)$, la órbita $\{T_3^n(x)\}$ es densa. Aun más: casi todo x es normal en base 3: en la expansión ternaria de 3, cada bloque ternario $(a_1 \ldots a_k)$ aparece con la frecuencia "correcta": 3^{-k}.
3. Si $x = 0,0200022022000\ldots$, entonces la órbita $\{T_3^n(x)\}$ no es densa: está contenida en el ternario de Cantor C. De hecho, es densa en C (el conjunto de Cantor C es T_3-invariante).

Multiplicar por 3, invariantemente

Hay muchísimos y muy variados conjuntos compactos, T_3-invariantes. Por ejemplo:

1. $E = \{x : x_i x_{i+1} = 0 \text{ para todo } i\}$.
2. $E = \{x : x_i x_{i+2^k} = 0 \text{ para todo } i, k\}$.
3. $E = \{$ número par de 0s entre dos dígitos $\neq 0$ $\}$.

Hay no numerables conjuntos compactos T_3-invariantes. Más aun, es imposible intentar cualquier tipo de descripción o clasificación de todos ellos.

Multiplicar por 3, invariantemente

Hay muchísimos y muy variados conjuntos compactos, T_3-invariantes. Por ejemplo:

1. $E = \{x : x_i x_{i+1} = 0 \text{ para todo } i\}$.
2. $E = \{x : x_i x_{i+2^k} = 0 \text{ para todo } i, k\}$.
3. $E = \{$ número par de 0s entre dos dígitos $\neq 0$ $\}$.

Hay no numerables conjuntos compactos T_3-invariantes. Más aun, es imposible intentar cualquier tipo de descripción o clasificación de todos ellos.

Multiplicar por 3, invariantemente

Hay muchísimos y muy variados conjuntos compactos, T_3-invariantes. Por ejemplo:

1. $E = \{x : x_i x_{i+1} = 0 \text{ para todo } i\}$.
2. $E = \{x : x_i x_{i+2^k} = 0 \text{ para todo } i, k\}$.
3. $E = \{$ número par de 0s entre dos dígitos $\neq 0$ $\}$.

Hay no numerables conjuntos compactos T_3-invariantes. Más aun, es imposible intentar cualquier tipo de descripción o clasificación de todos ellos.

Multiplicar por 3, invariantemente

Hay muchísimos y muy variados conjuntos compactos, T_3-invariantes. Por ejemplo:

1. $E = \{x : x_i x_{i+1} = 0 \text{ para todo } i\}$.
2. $E = \{x : x_i x_{i+2^k} = 0 \text{ para todo } i, k\}$.
3. $E = \{$ número par de 0s entre dos dígitos $\neq 0$ $\}$.

Hay no numerables conjuntos compactos T_3-invariantes. Más aun, es imposible intentar cualquier tipo de descripción o clasificación de todos ellos.

Multiplicar por 3, invariantemente

Hay muchísimos y muy variados conjuntos compactos, T_3-invariantes. Por ejemplo:

1. $E = \{x : x_i x_{i+1} = 0 \text{ para todo } i\}$.
2. $E = \{x : x_i x_{i+2^k} = 0 \text{ para todo } i, k\}$.
3. $E = \{$ número par de 0s entre dos dígitos $\neq 0$ $\}$.

Hay no numerables conjuntos compactos T_3-invariantes. Más aun, es imposible intentar cualquier tipo de descripción o clasificación de todos ellos.

Multiplicar por p

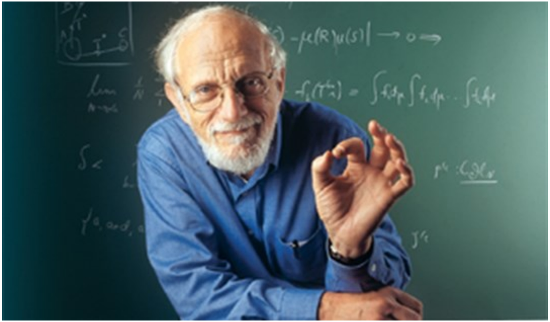
Observación

Todo lo dicho hasta ahora sobre T_3 vale también para

$$T_p(x) = px \bmod 1,$$

donde $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Multiplicar por 2 y por 3: el padre de la criatura



Algunas de las áreas que Furstenberg inició

1. Métodos de teoría ergódica en combinatoria (demostración ergódica del Teorema de Szemerédi,...).
2. Productos aleatorios de matrices, teoría ergódica no conmutativa (simplicidad de exponentes de Lyapunov, ...).
3. Ergodicidad única del flujo de horociclos, aplicaciones del toro, ...
4. Concepto de “disjointness” de sistemas dinámicos.
5. $\times 2$, $\times 3$, rigidez de acciones algebraicas de grupos “grandes”.
6. Geometría fractal $\cap$ teoría ergódica (CP-processes, ...).

Algunas de las áreas que Furstenberg inició

1. Métodos de teoría ergódica en combinatoria (demostración ergódica del Teorema de Szemerédi,...).
2. Productos aleatorios de matrices, teoría ergódica no conmutativa (simplicidad de exponentes de Lyapunov, ...).
3. Ergodicidad única del flujo de horociclos, aplicaciones del toro, ...
4. Concepto de "disjointness" de sistemas dinámicos.
5. $\times 2$, $\times 3$, rigidez de acciones algebraicas de grupos "grandes".
6. Geometría fractal $\cap$ teoría ergódica (CP-processes, ...).

Algunas de las áreas que Furstenberg inició

1. Métodos de teoría ergódica en combinatoria (demostración ergódica del Teorema de Szemerédi,...).
2. Productos aleatorios de matrices, teoría ergódica no conmutativa (simplicidad de exponentes de Lyapunov, ...).
3. Ergodicidad única del flujo de horociclos, aplicaciones del toro, ...
4. Concepto de “disjointness” de sistemas dinámicos.
5. $\times 2$, $\times 3$, rigidez de acciones algebraicas de grupos “grandes”.
6. Geometría fractal $\cap$ teoría ergódica (CP-processes, ...).

Algunas de las áreas que Furstenberg inició

1. Métodos de teoría ergódica en combinatoria (demostración ergódica del Teorema de Szemerédi,...).
2. Productos aleatorios de matrices, teoría ergódica no conmutativa (simplicidad de exponentes de Lyapunov, ...).
3. Ergodicidad única del flujo de horociclos, aplicaciones del toro, ...
4. Concepto de “disjointness” de sistemas dinámicos.
5. $\times 2$, $\times 3$, rigidez de acciones algebraicas de grupos “grandes”.
6. Geometría fractal $\cap$ teoría ergódica (CP-processes, ...).

Algunas de las áreas que Furstenberg inició

1. Métodos de teoría ergódica en combinatoria (demostración ergódica del Teorema de Szemerédi,...).
2. Productos aleatorios de matrices, teoría ergódica no conmutativa (simplicidad de exponentes de Lyapunov, ...).
3. Ergodicidad única del flujo de horociclos, aplicaciones del toro, ...
4. Concepto de “disjointness” de sistemas dinámicos.
5. $\times 2$, $\times 3$, rigidez de acciones algebraicas de grupos “grandes”.
6. Geometría fractal $\cap$ teoría ergódica (CP-processes, ...).

Algunas de las áreas que Furstenberg inició

1. Métodos de teoría ergódica en combinatoria (demostración ergódica del Teorema de Szemerédi,...).
2. Productos aleatorios de matrices, teoría ergódica no conmutativa (simplicidad de exponentes de Lyapunov, ...).
3. Ergodicidad única del flujo de horociclos, aplicaciones del toro, ...
4. Concepto de "disjointness" de sistemas dinámicos.
5. $\times 2$, $\times 3$, rigidez de acciones algebraicas de grupos "grandes".
6. Geometría fractal $\cap$ teoría ergódica (CP-processes, ...).

Multiplicar por 2 y por 3 son cosas muy distintas

1. Multiplicar por 2 es shiftear la expansión binaria. Multiplicar por 3 es shiftear la expansión ternaria. Pero es extremadamente difícil entender la relación entre las expansiones binarias y ternarias de un número dado.
2. Furstenberg propuso una serie de conjeturas que, desde distintos puntos de vista, promueven el siguiente principio heurístico :

   Las expansiones en bases 2 y 3 no tienen estructura común.

3. Por ejemplo, ¿qué se puede decir de la expansión ternaria de 2^n? Como 2^n es muuuy especial en base 2, no debería ser nada especial en base 3. Pero no se sabe casi nada.

Multiplicar por 2 y por 3 son cosas muy distintas

1. Multiplicar por 2 es shiftear la expansión binaria. Multiplicar por 3 es shiftear la expansión ternaria. Pero es extremadamente difícil entender la relación entre las expansiones binarias y ternarias de un número dado.
2. Furstenberg propuso una serie de conjeturas que, desde distintos puntos de vista, promueven el siguiente principio heurístico :

   Las expansiones en bases 2 y 3 no tienen estructura común.

3. Por ejemplo, ¿qué se puede decir de la expansión ternaria de 2^n? Como 2^n es muuuy especial en base 2, no debería ser nada especial en base 3. Pero no se sabe casi nada.

Multiplicar por 2 y por 3 son cosas muy distintas

1. Multiplicar por 2 es shiftear la expansión binaria. Multiplicar por 3 es shiftear la expansión ternaria. Pero es extremadamente difícil entender la relación entre las expansiones binarias y ternarias de un número dado.
2. Furstenberg propuso una serie de conjeturas que, desde distintos puntos de vista, promueven el siguiente principio heurístico :

   Las expansiones en bases 2 y 3 no tienen estructura común.

3. Por ejemplo, ¿qué se puede decir de la expansión ternaria de 2^n? Como 2^n es muuuy especial en base 2, no debería ser nada especial en base 3. Pero no se sabe casi nada.

Conjuntos invariantes y estructura común

- Podemos precisar el principio de "no hay estructura común" en términos de conjuntos invariantes.
- El círculo entero $[0, 1)$ es invariante bajo $\times p$ para todo p.
- Muchos conjuntos finitos de números racionales son invariantes bajo $\times 2$, $\times 3$. Por ej:

$$\{1/5, 2/5, 3/5, 4/5\}.$$

- Si A es cerrado y T_2-invariante y B es cerrado y T_3-invariante, entonces A y B no deberían tener "estructura común" (excepto que ambos sean finitos o todo el círculo)

Conjuntos invariantes y estructura común

- Podemos precisar el principio de "no hay estructura común" en términos de conjuntos invariantes.
- El círculo entero $[0, 1)$ es invariante bajo $\times p$ para todo p.
- Muchos conjuntos finitos de números racionales son invariantes bajo $\times 2$, $\times 3$. Por ej:

$$\{1/5, 2/5, 3/5, 4/5\}.$$

- Si A es cerrado y T_2-invariante y B es cerrado y T_3-invariante, entonces A y B no deberían tener "estructura común" (excepto que ambos sean finitos o todo el círculo)

Conjuntos invariantes y estructura común

- Podemos precisar el principio de “no hay estructura común” en términos de conjuntos invariantes.
- El círculo entero $[0,1)$ es invariante bajo $\times p$ para todo p.
- Muchos conjuntos finitos de números racionales son invariantes bajo $\times 2$, $\times 3$. Por ej:

$$\{1/5, 2/5, 3/5, 4/5\}.$$

- Si A es cerrado y T_2-invariante y B es cerrado y T_3-invariante, entonces A y B no deberían tener “estructura común” (excepto que ambos sean finitos o todo el círculo)

Conjuntos invariantes y estructura común

- Podemos precisar el principio de "no hay estructura común" en términos de conjuntos invariantes.
- El círculo entero $[0, 1)$ es invariante bajo $\times p$ para todo p.
- Muchos conjuntos finitos de números racionales son invariantes bajo $\times 2$, $\times 3$. Por ej:

$$\{1/5, 2/5, 3/5, 4/5\}.$$

- Si A es cerrado y T_2-invariante y B es cerrado y T_3-invariante, entonces A y B no deberían tener "estructura común" (excepto que ambos sean finitos o todo el círculo)

El inicio de la historia

Observación

- *Si x es racional, la órbita* $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ *es finita.*
- *Si x es irracional, la órbita* $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ *es infinita (y su clausura es invariante bajo* T_2 *y* T_3*).*

Teorema (Furstenberg 1967)

Si x es irracional, entonces la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ *es densa en* $[0,1)$.

Corolario

Si $E \subset [0,1)$ *es cerrado e invariante bajo* T_2 *y* T_3*, entonces E es o bien finito, o bien todo* $[0,1)$.

El inicio de la historia

Observación

- *Si x es racional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es finita.*
- *Si x es irracional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es infinita (y su clausura es invariante bajo T_2 y T_3).*

Teorema (Furstenberg 1967)

Si x es irracional, entonces la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es densa en $[0,1)$.

Corolario

Si $E \subset [0,1)$ es cerrado e invariante bajo T_2 y T_3, entonces E es o bien finito, o bien todo $[0,1)$.

El inicio de la historia

Observación

- *Si x es racional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es finita.*
- *Si x es irracional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es infinita (y su clausura es invariante bajo T_2 y T_3).*

Teorema (Furstenberg 1967)

Si x es irracional, entonces la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es densa en $[0,1)$.

Corolario

Si $E \subset [0,1)$ es cerrado e invariante bajo T_2 y T_3, entonces E es o bien finito, o bien todo $[0,1)$.

El inicio de la historia

Observación

- *Si x es racional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es finita.*
- *Si x es irracional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es infinita (y su clausura es invariante bajo T_2 y T_3).*

Teorema (Furstenberg 1967)

Si x es irracional, entonces la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es densa en $[0,1)$.

Corolario

Si $E \subset [0,1)$ es cerrado e invariante bajo T_2 y T_3, entonces E es o bien finito, o bien todo $[0,1)$.

El inicio de la historia

Observación

- *Si x es racional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es finita.*
- *Si x es irracional, la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es infinita (y su clausura es invariante bajo T_2 y T_3).*

Teorema (Furstenberg 1967)

Si x es irracional, entonces la órbita $\{T_2^n T_3^m x\}_{n,m=1}^{\infty}$ es densa en $[0,1)$.

Corolario

Si $E \subset [0,1)$ es cerrado e invariante bajo T_2 y T_3, entonces E es o bien finito, o bien todo $[0,1)$.

“La” conjetura $\times 2$, $\times 3$ de Furstenberg

Definición

Una medida de probabilidad Boreliana μ en $[0,1)$ es T_p-invariante si

$$\mu(B) = \mu(T_p^{-1} B) \quad \textit{para todos los borelianos } B.$$

Conjetura (Furstenberg 1967)

Si μ es T_2 y T_3-invariante, entonces μ es combinación convexa de Lebesgue y una medida atómica soportada en números racionales.

“La” conjetura $\times 2$, $\times 3$ de Furstenberg

Definición

Una medida de probabilidad Boreliana μ en $[0,1)$ es T_p-invariante si

$$\mu(B) = \mu(T_p^{-1}B) \quad \textit{para todos los borelianos } B.$$

Conjetura (Furstenberg 1967)

Si μ es T_2 y T_3-invariante, entonces μ es combinación convexa de Lebesgue y una medida atómica soportada en números racionales.

Acciones de grupos y rigidez

- Sea X un espacio, G un (semi)grupo y consideremos una acción $g \cdot x$.
- Por ej. si $G = \mathbb{N}^2$ y $X = [0,1)$, una acción es $(m,n) \cdot x = T_2^m T_3^n x$.
- Un principio general en Teoría Ergódica dice que acciones algebraicas de grupos "grandes" tienen solo los conjuntos/medidas invariantes "triviales" $\longrightarrow$ rigidez.
- Teoremas de rigidez de este tipo subyacen a muchas aplicaciones de la Teoría Ergódica a la Teoría de Números.

Acciones de grupos y rigidez

- Sea X un espacio, G un (semi)grupo y consideremos una acción $g \cdot x$.
- Por ej. si $G = \mathbb{N}^2$ y $X = [0, 1)$, una acción es $(m, n) \cdot x = T_2^m T_3^n x$.
- Un principio general en Teoría Ergódica dice que acciones algebraicas de grupos “grandes” tienen solo los conjuntos/medidas invariantes “triviales” $\longrightarrow$ rigidez.
- Teoremas de rigidez de este tipo subyacen a muchas aplicaciones de la Teoría Ergódica a la Teoría de Números.

Acciones de grupos y rigidez

- Sea X un espacio, G un (semi)grupo y consideremos una acción $g \cdot x$.
- Por ej. si $G = \mathbb{N}^2$ y $X = [0, 1)$, una acción es $(m, n) \cdot x = T_2^m T_3^n x$.
- Un principio general en Teoría Ergódica dice que acciones algebraicas de grupos "grandes" tienen solo los conjuntos/medidas invariantes "triviales" $\longrightarrow$ rigidez.
- Teoremas de rigidez de este tipo subyacen a muchas aplicaciones de la Teoría Ergódica a la Teoría de Números.

Acciones de grupos y rigidez

- Sea X un espacio, G un (semi)grupo y consideremos una acción $g \cdot x$.
- Por ej. si $G = \mathbb{N}^2$ y $X = [0, 1)$, una acción es $(m, n) \cdot x = T_2^m T_3^n x$.
- Un principio general en Teoría Ergódica dice que acciones algebraicas de grupos "grandes" tienen solo los conjuntos/medidas invariantes "triviales" $\longrightarrow$ rigidez.
- Teoremas de rigidez de este tipo subyacen a muchas aplicaciones de la Teoría Ergódica a la Teoría de Números.

Cómo cuantificar “estructura común”

1. El Teorema de Furstenberg dice que conjuntos no triviales T_2 y T_3-invariantes no tienen estructura común en el sentido más crudo: no pueden ser iguales.
2. ¿Cómo podemos cuantificar la estructura común de forma más fina/cuantitativa? Los conjuntos que nos interesan son fractales: no numberables, de medida 0, con cierta forma de autosimilaridad.
3. La geometría ayuda a cuantificar la estructura común. Por ejemplo, si dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ no tienen estructura común uno espera que la suma

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

sea “lo más grande posible” y que las intersecciones $A \cap B$ and $A \cap (\lambda B + t)$ sean “lo más chicas posible”.

Cómo cuantificar “estructura común”

1. El Teorema de Furstenberg dice que conjuntos no triviales T_2 y T_3-invariantes no tienen estructura común en el sentido más crudo: no pueden ser iguales.
2. ¿Cómo podemos cuantificar la estructura común de forma más fina/cuantitativa? Los conjuntos que nos interesan son fractales: no numberables, de medida 0, con cierta forma de autosimilaridad.
3. La geometría ayuda a cuantificar la estructura común. Por ejemplo, si dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ no tienen estructura común uno espera que la suma

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

sea “lo más grande posible” y que las intersecciones $A \cap B$ and $A \cap (\lambda B + t)$ sean “lo más chicas posible”.

Cómo cuantificar “estructura común”

1. El Teorema de Furstenberg dice que conjuntos no triviales T_2 y T_3-invariantes no tienen estructura común en el sentido más crudo: no pueden ser iguales.
2. ¿Cómo podemos cuantificar la estructura común de forma más fina/cuantitativa? Los conjuntos que nos interesan son fractales: no numberables, de medida 0, con cierta forma de autosimilaridad.
3. La geometría ayuda a cuantificar la estructura común. Por ejemplo, si dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ no tienen estructura común uno espera que la suma

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

sea “lo más grande posible” y que las intersecciones $A \cap B$ and $A \cap (\lambda B + t)$ sean “lo más chicas posible”.

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un “tamaño” a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n \log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un "tamaño" a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n \log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un “tamaño” a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2 / \log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n \log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un "tamaño" a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2 / \log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n \log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un “tamaño” a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n \log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un “tamaño” a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n \log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un "tamaño" a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n\log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un "tamaño" a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n\log p}.$$

Dimensión de Hausdorff

- Mejor exponente para cubrimientos por bolas de radios posiblemente diferentes.
- Asigna un “tamaño” a todos los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ tal que:
  - Varía entre 0 y d,
  - Conjuntos numerables tienen dimensión 0 y conjuntos de medida positiva dimensión d,
  - Da el tamaño correcto a objetos suaves,
  - Es invariante bajo funciones bi-Lipschitz,
  - Es contablemente estable,
  - El ternario de Cantor tiene dimensión $\log 2/\log 3$,
  - En general, si A es cerrado y T_p-invariante, entonces

$$\dim_H(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\{\text{bloques } p\text{-arios de longitud } n \text{ en } A\}|}{n\log p}.$$

Conjetura de Furstenberg 1

p, q no son potencias de un mismo entero. Por ej. 2 y 3, o 6 y 12 (pero no 8 y 16).

Conjetura 1

Sean A, B cerrados y T_p, T_q-invariantes. Then

$$\dim_H(A+B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1).$$

Motivación

- *La fórmula se cumple "típicamente". Por ejemplo, para A, B arbitrarios se cumple* que*

  $\dim_H(A+\lambda B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1)$ *para casi todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *El lado derecho es siempre cota superior (trivial).*
- *Para que haya una desigualdad estricta, A y B tienen que tener "estructura común en muchas escalas".*

Conjetura de Furstenberg 1

p, q no son potencias de un mismo entero. Por ej. 2 y 3, o 6 y 12 (pero no 8 y 16).

Conjetura 1

Sean A, B cerrados y T_p, T_q-invariantes. Then

$$\dim_H(A+B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1).$$

Motivación

- *La fórmula se cumple "típicamente". Por ejemplo, para A, B arbitrarios se cumple* que*

$$\dim_H(A+\lambda B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1) \text{ para casi todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- *El lado derecho es siempre cota superior (trivial).*
- *Para que haya una desigualdad estricta, A y B tienen que tener "estructura común en muchas escalas".*

Conjetura de Furstenberg 1

p, q no son potencias de un mismo entero. Por ej. 2 y 3, o 6 y 12 (pero no 8 y 16).

Conjetura 1

Sean A, B cerrados y T_p, T_q-invariantes. Then

$$\dim_H(A+B) = \max(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1).$$

Motivación

- *La fórmula se cumple "típicamente". Por ejemplo, para A, B arbitrarios se cumple* que*

  $$\dim_H(A+\lambda B) = \max(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1) \text{ para casi todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- *El lado derecho es siempre cota superior (trivial).*
- *Para que haya una desigualdad estricta, A y B tienen que tener "estructura común en muchas escalas".*

Conjetura de Furstenberg 1

p, q no son potencias de un mismo entero. Por ej. 2 y 3, o 6 y 12 (pero no 8 y 16).

Conjetura 1

Sean A, B cerrados y T_p, T_q-invariantes. Then

$$\dim_H(A+B) = \max(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1).$$

Motivación

- *La fórmula se cumple "típicamente". Por ejemplo, para A, B arbitrarios se cumple* que*

  $$\dim_H(A+\lambda B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1) \textit{ para casi todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- *El lado derecho es siempre cota superior (trivial).*
- *Para que haya una desigualdad estricta, A y B tienen que tener "estructura común en muchas escalas".*

Conjetura de Furstenberg 1

p, q no son potencias de un mismo entero. Por ej. 2 y 3, o 6 y 12 (pero no 8 y 16).

Conjetura 1

Sean A, B cerrados y T_p, T_q-invariantes. Then

$$\dim_H(A+B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1).$$

Motivación

- *La fórmula se cumple "típicamente". Por ejemplo, para A, B arbitrarios se cumple* que*

$$\dim_H(A+\lambda B) = \max(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1) \textit{ para casi todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- *El lado derecho es siempre cota superior (trivial).*
- *Para que haya una desigualdad estricta, A y B tienen que tener "estructura común en muchas escalas".*

Conjetura de Furstenberg 1

p, q no son potencias de un mismo entero. Por ej. 2 y 3, o 6 y 12 (pero no 8 y 16).

Conjetura 1

Sean A, B cerrados y T_p, T_q-invariantes. Then

$$\dim_H(A + B) = \max(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1).$$

Motivación

- *La fórmula se cumple "típicamente". Por ejemplo, para A, B arbitrarios se cumple* que*

  $$\dim_H(A + \lambda B) = \max(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1) \text{ para casi todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- *El lado derecho es siempre cota superior (trivial).*
- *Para que haya una desigualdad estricta, A y B tienen que tener "estructura común en muchas escalas".*

p-Cantor sets

Definición

Un p-Cantor *set es un conjunto A que se obtiene restringiendo los dígitos p-arios de A a un subconjunto $D \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$.*

Observación

- *El ternario de Cantor es un 3-Cantor set, con $D = \{0, 2\}$.*
- *Los p-Cantor sets con cerrados y T_p-invariantes.*
- *Son los ejemplos más simples y naturales de conjuntos T_p-invariantes: auto-similaridad.*

p-Cantor sets

Definición

Un p-Cantor set es un conjunto A que se obtiene restringiendo los dígitos p-arios de A a un subconjunto $D \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Observación

- *El ternario de Cantor es un 3-Cantor set, con* $D = \{0, 2\}$.
- *Los p-Cantor sets con cerrados y* T_p*-invariantes.*
- *Son los ejemplos más simples y naturales de conjuntos* T_p*-invariantes: auto-similaridad.*

p-Cantor sets

Definición

Un p-Cantor set es un conjunto A que se obtiene restringiendo los dígitos p-arios de A a un subconjunto $D \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Observación

- *El ternario de Cantor es un 3-Cantor set, con $D = \{0, 2\}$.*
- *Los p-Cantor sets con cerrados y T_p-invariantes.*
- *Son los ejemplos más simples y naturales de conjuntos T_p-invariantes: auto-similaridad.*

p-Cantor sets

Definición

Un p-Cantor set es un conjunto A que se obtiene restringiendo los dígitos p-arios de A a un subconjunto $D \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Observación

- *El ternario de Cantor es un* 3*-Cantor set, con* $D = \{0, 2\}$.
- *Los p-Cantor sets con cerrados y* T_p*-invariantes.*
- *Son los ejemplos más simples y naturales de conjuntos* T_p*-invariantes: auto-similaridad.*

p-Cantor sets

Definición

Un p-Cantor set es un conjunto A que se obtiene restringiendo los dígitos p-arios de A a un subconjunto $D \subset \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Observación

- *El ternario de Cantor es un* 3*-Cantor set, con* $D = \{0, 2\}$.
- *Los p-Cantor sets con cerrados y* T_p*-invariantes.*
- *Son los ejemplos más simples y naturales de conjuntos* T_p*-invariantes: auto-similaridad.*

Solución a la Conjetura de Furstenberg 1

Teorema (Y.Peres-P.S. 2009)

Si A, B son un p-Cantor set y un q-Cantor set, entonces

$$\dim_H(A+\lambda B) = \min(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

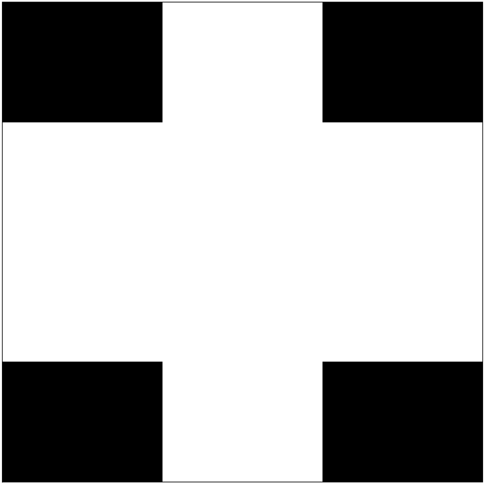
Solución a la Conjetura de Furstenberg 1

Teorema (M.Hochman-P.S. 2012)

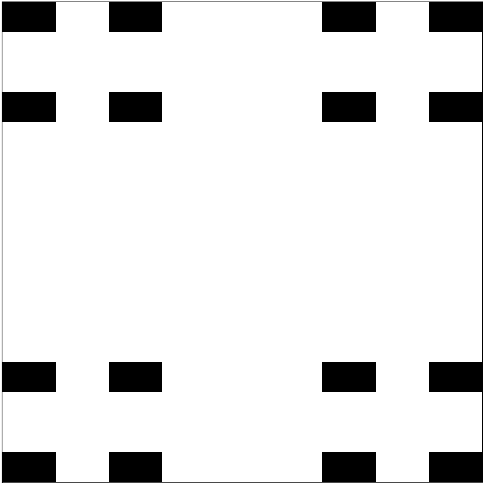
Si A, B son cerrados y T_p, T_q-invariantes, entonces

$$\dim_H(A + \lambda B) = \min(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

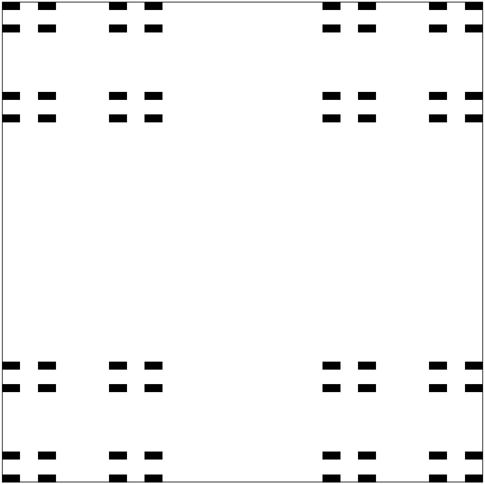
¡Dibujos!



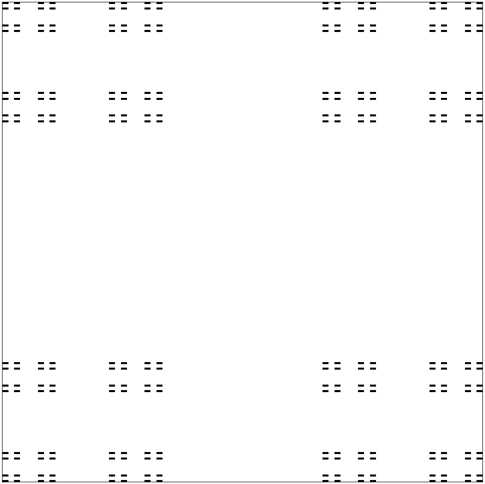
¡Dibujos!



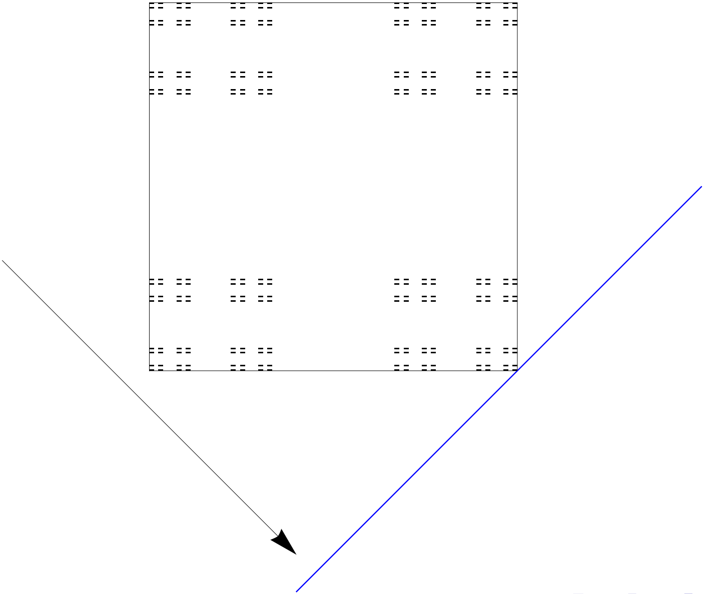
¡Dibujos!



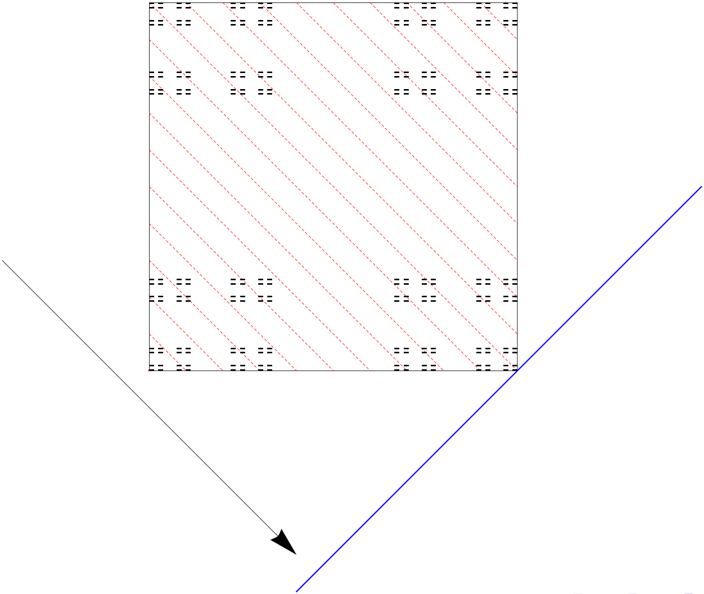
¡Dibujos!



¡Dibujos!



¡Dibujos!



Un corolario para subconjuntos de los enteros

Definición

La densidad logarítmica de $A \subset \mathbb{N}$ *es*

$$\Delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |A \cap \{1, \ldots, n\}|}{\log n}.$$

Corolario

Sea A el conjunto de números naturales cuya expansión en base 4 *tiene solo dígitos* $0, 3$*, y sea B el conjunto de números naturales cuya expansión en base* 10 *tiene solo dígitos* $1, 2, 7$*. Entonces*

$$\Delta(A + B) = \Delta(A) + \Delta(B) = \frac{\log 2}{\log 4} + \frac{\log 3}{\log 10}.$$

Un corolario para subconjuntos de los enteros

Definición

La densidad logarítmica de $A \subset \mathbb{N}$ *es*

$$\Delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |A \cap \{1,\ldots,n\}|}{\log n}.$$

Corolario

Sea A *el conjunto de números naturales cuya expansión en base* 4 *tiene solo dígitos* $0,3$*, y sea* B *el conjunto de números naturales cuya expansión en base* 10 *tiene solo dígitos* $1,2,7$*. Entonces*

$$\Delta(A+B) = \Delta(A) + \Delta(B) = \frac{\log 2}{\log 4} + \frac{\log 3}{\log 10}.$$

Nociones más generales de estructura común

- Vimos que si

$$\dim_H(A+B) < \min(\dim_H(A)+\dim_H(B), 1),$$

entonces A y B tienen "estructura común" en muchas escalas.

- ¡Pero el recíproco no vale para nada! Para muchos ("casi todos") los conjuntos A, incluso T_p-invariantes,

$$\dim_H(A+A) = \min(2\dim_H(A), 1).$$

- Una noción más fuerte de estructura común está dada por el tamaño de las intersecciones. Por ejemplo, $A \cap A$ siempre tiene dimensión mayor a la "esperada" (si $\dim_H(A) > 0$).

Nociones más generales de estructura común

- Vimos que si

$$\dim_H(A+B) < \min(\dim_H(A) + \dim_H(B), 1),$$

entonces A y B tienen "estructura común" en muchas escalas.

- ¡Pero el recíproco no vale para nada! Para muchos ("casi todos") los conjuntos A, incluso T_p-invariantes,

$$\dim_H(A+A) = \min(2\dim_H(A), 1).$$

- Una noción más fuerte de estructura común está dada por el tamaño de las intersecciones. Por ejemplo, $A \cap A$ siempre tiene dimensión mayor a la "esperada" (si $\dim_H(A) > 0$).

Nociones más generales de estructura común

- Vimos que si

$$\dim_H(A+B) < \min(\dim_H(A)+\dim_H(B),1),$$

  entonces A y B tienen "estructura común" en muchas escalas.
- ¡Pero el recíproco no vale para nada! Para muchos ("casi todos") los conjuntos A, incluso T_p-invariantes,

$$\dim_H(A+A) = \min(2\dim_H(A),1).$$

- Una noción más fuerte de estructura común está dada por el tamaño de las intersecciones. Por ejemplo, $A \cap A$ siempre tiene dimensión mayor a la "esperada" (si $\dim_H(A) > 0$).

Conjetura de Furstenberg 2

Conjetura 2 (Furstenberg 1969)

Sean A, B cerrados e invariantes bajo T_p, T_q (vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}$). Entonces para toda *biyección afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$\dim_H(A \cap f(B)) \leq \max(\dim_H(A) + \dim_H(B) - 1, 0).$$

Motivación

- *Se sabe que la cota vale para casi toda biyección afín, y el lado derecho es óptimo* (para conjuntos A, B arbitrarios).*
- *Se puede ver que Conjetura 2 $\Longrightarrow$ Conjetura 1. Heurísticamente, la $A + B$ es "grande" si "muchas" fibras son "chicas". La conjetura afirma que todas las fibras son chicas.*

Conjetura de Furstenberg 2

Conjetura 2 (Furstenberg 1969)

Sean A, B cerrados e invariantes bajo T_p, T_q (vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}$). Entonces para toda biyección afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\dim_H(A \cap f(B)) \leq \max(\dim_H(A) + \dim_H(B) - 1, 0).$$

Motivación

- *Se sabe que la cota vale para casi toda biyección afín, y el lado derecho es óptimo* (para conjuntos A, B arbitrarios).*
- *Se puede ver que Conjetura 2 $\Longrightarrow$ Conjetura 1. Heurísticamente, la $A + B$ es "grande" si "muchas" fibras son "chicas". La conjetura afirma que todas las fibras son chicas.*

Conjetura de Furstenberg 2

Conjetura 2 (Furstenberg 1969)

Sean A, B cerrados e invariantes bajo T_p, T_q (vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}$). Entonces para toda biyección afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\dim_H(A \cap f(B)) \leq \max(\dim_H(A) + \dim_H(B) - 1, 0).$$

Motivación

- *Se sabe que la cota vale para casi toda biyección afín, y el lado derecho es óptimo* * *(para conjuntos A, B arbitrarios).*
- *Se puede ver que Conjetura 2 $\Longrightarrow$ Conjetura 1. Heurísticamente, la $A + B$ es "grande" si "muchas" fibras son "chicas". La conjetura afirma que todas las fibras son chicas.*

Conjetura de Furstenberg 2

Conjetura 2 (Furstenberg 1969)

Sean A, B cerrados e invariantes bajo T_p, T_q (vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}$). Entonces para toda biyección afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\dim_H(A \cap f(B)) \leq \max(\dim_H(A) + \dim_H(B) - 1, 0).$$

Motivación

- *Se sabe que la cota vale para casi toda biyección afín, y el lado derecho es óptimo* (para conjuntos A, B arbitrarios).*
- *Se puede ver que Conjetura 2 $\Longrightarrow$ Conjetura 1. Heurísticamente, la $A + B$ es "grande" si "muchas" fibras son "chicas". La conjetura afirma que todas las fibras son chicas.*

Solución a la conjetura de Furstenberg 2

Teorema (P.S. 2016)

La conjetura de Furstenberg 2 se cumple.

Observación

Meng Wu (Universidad of Oulu, Finlandia) independientemente también demostró la conjetura. Las demostraciones son completamente distintas.

Solución a la conjetura de Furstenberg 2

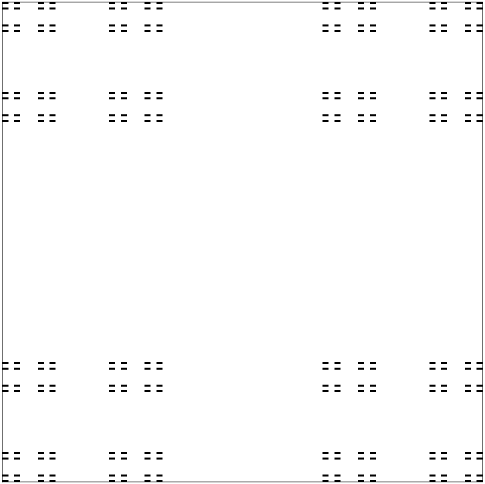
Teorema (P.S. 2016)

La conjetura de Furstenberg 2 se cumple.

Observación

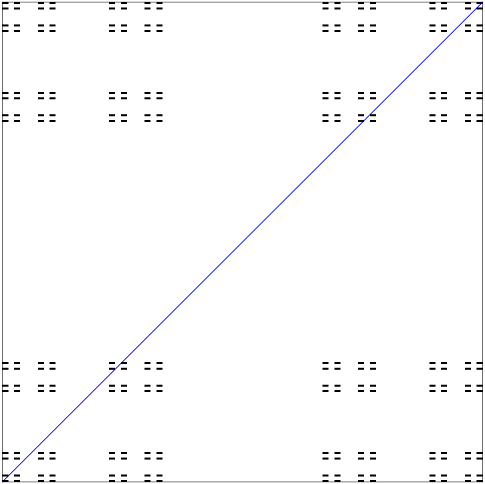
Meng Wu (Universidad of Oulu, Finlandia) independientemente también demostró la conjetura. Las demostraciones son completamente distintas.

¡Más dibujos!



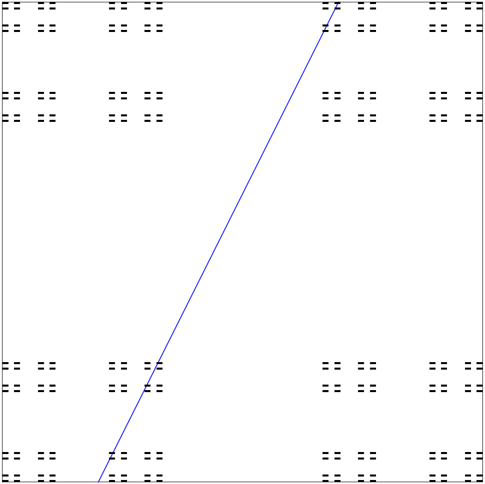
Nuestro viejo amigo: $A \times B$.

¡Más dibujos!



$$A \times B \cap \text{diagonal} = A \cap B.$$

¡Más dibujos!



$A \times B \cap$ cualquier recta $= A \cap$ imagen afín de B.

Un corolario para subconjuntos de los enteros

Corolario

Sean A los números naturales con dígitos $0, 3$ *en base* 4*, y B los números naturales con dígitos* $1, 2, 7$ *en base* 10*. Entonces*

$$\Delta(A \cap B) = 0.$$

Pregunta (Relacionada con otra conjetura de Furstenberg)

Es $A \cap B$ *finito?*

Un corolario para subconjuntos de los enteros

Corolario

Sean A los números naturales con dígitos $0, 3$ en base 4, y B los números naturales con dígitos $1, 2, 7$ en base 10. Entonces

$$\Delta(A \cap B) = 0.$$

Pregunta (Relacionada con otra conjetura de Furstenberg)

Es $A \cap B$ finito?

Algunas palabras sobre los métodos

- La demostración no tiene casi nada ver con los métodos usados para demostrar la Conjetura 1 (aunque sí usa ideas de Nazarov-Peres-P.S. para demostrar una versión de la Conjetura 1 para medidas).
- La estrategia general está inspirada en un importantísimo trabajo de M. Hochman (2014) sobre medidas autosimilares. Sin embargo, Hochman trabaja con entropía mientras que yo me baso en normas L^q: los resultados son más fuertes que los de Hochman.
- Dos elementos novedosos respecto del trabajo de Hochman son la aplicación de ideas y resultados de Combinatoria Aditiva y Análisis Multifractal.

Algunas palabras sobre los métodos

- La demostración no tiene casi nada ver con los métodos usados para demostrar la Conjetura 1 (aunque sí usa ideas de Nazarov-Peres-P.S. para demostrar una versión de la Conjetura 1 para medidas).
- La estrategia general está inspirada en un importantísimo trabajo de M. Hochman (2014) sobre medidas autosimilares. Sin embargo, Hochman trabaja con entropía mientras que yo me baso en normas L^q: los resultados son más fuertes que los de Hochman.
- Dos elementos novedosos respecto del trabajo de Hochman son la aplicación de ideas y resultados de Combinatoria Aditiva y Análisis Multifractal.

Algunas palabras sobre los métodos

- La demostración no tiene casi nada ver con los métodos usados para demostrar la Conjetura 1 (aunque sí usa ideas de Nazarov-Peres-P.S. para demostrar una versión de la Conjetura 1 para medidas).
- La estrategia general está inspirada en un importantísimo trabajo de M. Hochman (2014) sobre medidas autosimilares. Sin embargo, Hochman trabaja con entropía mientras que yo me baso en normas L^q: los resultados son más fuertes que los de Hochman.
- Dos elementos novedosos respecto del trabajo de Hochman son la aplicación de ideas y resultados de Combinatoria Aditiva y Análisis Multifractal.

Combinatoria aditiva

- En líneas generales, la combinatoria aditiva estudia el comportamiento de conjuntos discretos bajo las operaciones de suma y resta (y ocasionalmente multiplicación).
- Por ejemplo, la combinatoria aditiva estudia qué condiciones estructurales sobre A garantizan que A contenga progresiones aritméticas (largas) (Teoremas de Roth, Szemerédi, Chang, Bourgain, Sanders,...).
- Otro tema predominante es la relación entre el tamaño de la suma aritmética $A + A$ y la estructura de A (Teoremas de Freiman, Bourgain,...).
- La combinatoria aditiva es una herramienta muy poderosa que se viene aplicando en áreas muy diversas, incluyendo Análisis, Teoría Ergódica, Teoría Geométrica de la Medida, Teoría Geométrica de Grupos, etc. El líder absoluto en estas aplicaciones es J. Bourgain.

Combinatoria aditiva

- En líneas generales, la combinatoria aditiva estudia el comportamiento de conjuntos discretos bajo las operaciones de suma y resta (y ocasionalmente multiplicación).
- Por ejemplo, la combinatoria aditiva estudia qué condiciones estructurales sobre A garantizan que A contenga progresiones aritméticas (largas) (Teoremas de Roth, Szemerédi, Chang, Bourgain, Sanders,...).
- Otro tema predominante es la relación entre el tamaño de la suma aritmética $A + A$ y la estructura de A (Teoremas de Freiman, Bourgain,...).
- La combinatoria aditiva es una herramienta muy poderosa que se viene aplicando en áreas muy diversas, incluyendo Análisis, Teoría Ergódica, Teoría Geométrica de la Medida, Teoría Geométrica de Grupos, etc. El líder absoluto en estas aplicaciones es J. Bourgain.

Combinatoria aditiva

- En líneas generales, la combinatoria aditiva estudia el comportamiento de conjuntos discretos bajo las operaciones de suma y resta (y ocasionalmente multiplicación).
- Por ejemplo, la combinatoria aditiva estudia qué condiciones estructurales sobre A garantizan que A contenga progresiones aritméticas (largas) (Teoremas de Roth, Szemerédi, Chang, Bourgain, Sanders,...).
- Otro tema predominante es la relación entre el tamaño de la suma aritmética $A + A$ y la estructura de A (Teoremas de Freiman, Bourgain,...).
- La combinatoria aditiva es una herramienta muy poderosa que se viene aplicando en áreas muy diversas, incluyendo Análisis, Teoría Ergódica, Teoría Geométrica de la Medida, Teoría Geométrica de Grupos, etc. El líder absoluto en estas aplicaciones es J. Bourgain.

Combinatoria aditiva

- En líneas generales, la combinatoria aditiva estudia el comportamiento de conjuntos discretos bajo las operaciones de suma y resta (y ocasionalmente multiplicación).
- Por ejemplo, la combinatoria aditiva estudia qué condiciones estructurales sobre A garantizan que A contenga progresiones aritméticas (largas) (Teoremas de Roth, Szemerédi, Chang, Bourgain, Sanders,...).
- Otro tema predominante es la relación entre el tamaño de la suma aritmética $A + A$ y la estructura de A (Teoremas de Freiman, Bourgain,...).
- La combinatoria aditiva es una herramienta muy poderosa que se viene aplicando en áreas muy diversas, incluyendo Análisis, Teoría Ergódica, Teoría Geométrica de la Medida, Teoría Geométrica de Grupos, etc. El líder absoluto en estas aplicaciones es J. Bourgain.

Energía aditiva y sumas aritméticas

Definición

La *Energía Aditiva* *de un conjunto* $A \subset \mathbb{Z}$ *o* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *es*

$$E(A, A) = |\{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}| .$$

- $|A|^2 \leq E(A, A) \leq |A|^3$.
- Si $E(A, A) \approx |A|^3$, entonces hay "muchos" valores $b \in A + A$ que tienen "mucha multiplicidad" (hay muchos pares $a, a' \in A$ tales que $a + a' = b$). "Mucha estructura aditiva".

Energía aditiva y sumas aritméticas

Definición

La Energía Aditiva de un conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es

$$E(A,A) = |\{(a_1,a_2,a_3,a_4) : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}|\,.$$

- $|A|^2 \leq E(A,A) \leq |A|^3$.
- Si $E(A,A) \approx |A|^3$, entonces hay "muchos" valores $b \in A + A$ que tienen "mucha multiplicidad" (hay muchos pares $a, a' \in A$ tales que $a + a' = b$). "Mucha estructura aditiva".

Energía aditiva y sumas aritméticas

Definición

La Energía Aditiva de un conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es

$$E(A, A) = |\{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}|.$$

- $|A|^2 \leq E(A, A) \leq |A|^3$.
- Si $E(A, A) \approx |A|^3$, entonces hay "muchos" valores $b \in A + A$ que tienen "mucha multiplicidad" (hay muchos pares $a, a' \in A$ tales que $a + a' = b$). "Mucha estructura aditiva".

Energía aditiva y tamaño de sumas

- Si $|A + A| \approx |A|$ (lo más chico que puede ser) entonces A también tiene "mucha estructura aditiva".
- Cauchy-Schwartz muestra que

$$E(A, A) \geq \frac{|A|^4}{|A + A|},$$

o sea que si $A + A$ es "muy chico", entonces $E(A, A)$ es "muy grande".

- Pero el recíproco está lejos de valer. Si A es la unión de un conjunto "estructurado" y uno "aleatorio" del mismo tamaño, entonces $|A + A| \approx |A|^2$ ("muy poca estructura") pero $E(A, A) \approx |A|^3$ ("mucha estructura").

Energía aditiva y tamaño de sumas

- Si $|A+A| \approx |A|$ (lo más chico que puede ser) entonces A también tiene "mucha estructura aditiva".
- Cauchy-Schwartz muestra que

$$E(A,A) \geq \frac{|A|^4}{|A+A|},$$

  o sea que si $A+A$ es "muy chico", entonces $E(A,A)$ es "muy grande".
- Pero el recíproco está lejos de valer. Si A es la unión de un conjunto "estructurado" y uno "aleatorio" del mismo tamaño, entonces $|A+A| \approx |A|^2$ ("muy poca estructura") pero $E(A,A) \approx |A|^3$ ("mucha estructura").

Energía aditiva y tamaño de sumas

- Si $|A + A| \approx |A|$ (lo más chico que puede ser) entonces A también tiene "mucha estructura aditiva".
- Cauchy-Schwartz muestra que

$$E(A, A) \geq \frac{|A|^4}{|A + A|},$$

 o sea que si $A + A$ es "muy chico", entonces $E(A, A)$ es "muy grande".
- Pero el recíproco está lejos de valer. Si A es la unión de un conjunto "estructurado" y uno "aleatorio" del mismo tamaño, entonces $|A + A| \approx |A|^2$ ("muy poca estructura") pero $E(A, A) \approx |A|^3$ ("mucha estructura").

Una demostración

$$
\begin{aligned}
E(A,A) &= |\{(a_1,a_2,a_3,a_4) : a_1+a_2 = a_3+a_4\}| \\
&= \sum_{x\in A+A} |\{(a_1,a_2,a_3,a_4) : a_1+a_2 = a_3+a_4 = x\}| \\
&= \sum_{x\in A+A} |\{(a_1,a_2) : a_1+a_2 = x\}|^2 \\
&\geq_{\text{C-S}} \frac{\left(\sum_{x\in A+A} |\{(a_1,a_2) : a_1+a_2 = x\}|\right)^2}{|A+A|} \\
&= \frac{|A|^4}{|A+A|}.
\end{aligned}
$$

Teorema de Balog-Szemerédi-Gowers

Observación

Si $E(A, A) \approx |A|^3$ (o sea, la energía aditiva es casi máxima, “mucha estructura”), no podemos garantizar que $A + A$ sea chico.

Teorema (Balog-Szemerédi-Gowers)

Si $E(A, A) \approx |A|^3$, entonces existe un subconjunto $A' \subset A$ tal que:

1. *$|A'| \approx |A|$ (o sea A' es un subconjunto muy “grande” de A),*
2. *$|A' + A'| \approx |A'|$ (o sea, el conjunto suma de A' es muy chico).*

Observación

La demostración es elemental, usa ideas de grafos pero muy simples. Sin embargo el teorema tiene un poder extraordinario.

Teorema de Balog-Szemerédi-Gowers

Observación

Si $E(A, A) \approx |A|^3$ (o sea, la energía aditiva es casi máxima, "mucha estructura"), no podemos garantizar que $A + A$ sea chico.

Teorema (Balog-Szemerédi-Gowers)

Si $E(A, A) \approx |A|^3$, entonces existe un subconjunto $A' \subset A$ tal que:

1. $|A'| \approx |A|$ (o sea A' es un subconjunto muy "grande" de A),
2. $|A' + A'| \approx |A'|$ (o sea, el conjunto suma de A' es muy chico).

Observación

La demostración es elemental, usa ideas de grafos pero muy simples. Sin embargo el teorema tiene un poder extraordinario.

Teorema de Balog-Szemerédi-Gowers

Observación

Si $E(A, A) \approx |A|^3$ (o sea, la energía aditiva es casi máxima, "mucha estructura"), no podemos garantizar que $A + A$ sea chico.

Teorema (Balog-Szemerédi-Gowers)

Si $E(A, A) \approx |A|^3$, entonces existe un subconjunto $A' \subset A$ tal que:

1. *$|A'| \approx |A|$ (o sea A' es un subconjunto muy "grande" de A),*
2. *$|A' + A'| \approx |A'|$ (o sea, el conjunto suma de A' es muy chico).*

Observación

La demostración es elemental, usa ideas de grafos pero muy simples. Sin embargo el teorema tiene un poder extraordinario.

Teorema de Balog-Szemerédi-Gowers

Observación

Si $E(A,A) \approx |A|^3$ (o sea, la energía aditiva es casi máxima, "mucha estructura"), no podemos garantizar que $A+A$ sea chico.

Teorema (Balog-Szemerédi-Gowers)

Si $E(A,A) \approx |A|^3$, entonces existe un subconjunto $A' \subset A$ tal que:

1. *$|A'| \approx |A|$ (o sea A' es un subconjunto muy "grande" de A),*
2. *$|A'+A'| \approx |A'|$ (o sea, el conjunto suma de A' es muy chico).*

Observación

La demostración es elemental, usa ideas de grafos pero muy simples. Sin embargo el teorema tiene un poder extraordinario.

Teorema de Balog-Szemerédi-Gowers

Observación

Si $E(A,A) \approx |A|^3$ (o sea, la energía aditiva es casi máxima, "mucha estructura"), no podemos garantizar que $A + A$ sea chico.

Teorema (Balog-Szemerédi-Gowers)

Si $E(A,A) \approx |A|^3$, entonces existe un subconjunto $A' \subset A$ tal que:

1. *$|A'| \approx |A|$ (o sea A' es un subconjunto muy "grande" de A),*
2. *$|A' + A'| \approx |A'|$ (o sea, el conjunto suma de A' es muy chico).*

Observación

La demostración es elemental, usa ideas de grafos pero muy simples. Sin embargo el teorema tiene un poder extraordinario.

Lo poco que sabemos sobre multiplicar por 2 y 3

Pregunta

¿Es verdad que $(3/2)^n \bmod 1$ *es denso en* $[0,1)$*?*

¡¡¡Muchas gracias!!!