

Soluciones numéricas para una ecuación de evolución en mecánica cuántica.

Tatiana Da Costa, Mariano De Leo, Carla Del Grosso

Universidad Nacional de General Sarmiento

UMA 2016

- 1 Un poco de contexto
 - El modelo cuántico
 - Problema Objetivo: *Evolucionador*
- 2 Diseño de Algoritmos 1: Métodos de descomposición temporal
 - Generalidades
 - Obtención flujos parciales exactos
- 3 Diseño de Algoritmos 2: Cuadratura y aplicaciones
 - Subrutinas
- 4 Diseño de Algoritmos 3: Flujos parciales aproximados

Modelo para movimiento de cargas en *nanohilo*

Modelo para movimiento de cargas en *nanohilo* con una interacción lineal localmente constante apuntando al origen

Modelo para movimiento de cargas en *nanohilo* con una interacción lineal localmente constante apuntando al origen y una interacción no lineal de carácter local:

Modelo para movimiento de cargas en *nanohilo* con una interacción lineal localmente constante apuntando al origen y una interacción no lineal de carácter local:

$$iu_t(x, t) = \underbrace{-u_{xx}(x, t) + |x|u(x, t)}_{\text{término lineal}} + \underbrace{|u(x, t)|^{2\sigma}u(x, t)}_{\text{término no lineal}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

Modelo para movimiento de cargas en *nanohilo* con una interacción lineal localmente constante apuntando al origen y una interacción no lineal de carácter local:

$$iu_t(x, t) = \underbrace{-u_{xx}(x, t) + |x|u(x, t)}_{\text{término lineal}} + \underbrace{|u(x, t)|^{2\sigma}u(x, t)}_{\text{término no lineal}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

El caso $\sigma = 1$ es especialmente importante.

Modelo para movimiento de cargas en *nanohilo* con una interacción lineal localmente constante apuntando al origen y una interacción no lineal de carácter local:

$$iu_t(x, t) = \underbrace{-u_{xx}(x, t) + |x|u(x, t)}_{\text{término lineal}} + \underbrace{|u(x, t)|^{2\sigma}u(x, t)}_{\text{término no lineal}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

El caso $\sigma = 1$ es especialmente importante. En tal caso la interacción es proporcional a la densidad de carga $|u(x, t)|^2$.

Objetivo

Dados:

Dados:

- El valor de $\sigma > 0$.

Dados:

- El valor de $\sigma > 0$.
- El valor inicial u_0 .

Dados:

- El valor de $\sigma > 0$.
- El valor inicial u_0 .
- El tiempo de vuelo $t > 0$.

Dados:

- El valor de $\sigma > 0$.
- El valor inicial u_0 .
- El tiempo de vuelo $t > 0$.

Hallar:

Dados:

- El valor de $\sigma > 0$.
- El valor inicial u_0 .
- El tiempo de vuelo $t > 0$.

Hallar:

$$u(x, t)$$

Dados:

- El valor de $\sigma > 0$.
- El valor inicial u_0 .
- El tiempo de vuelo $t > 0$.

Hallar:

$u(x, t)$ la solución de (1.1) con dato inicial u_0 .

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución,

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva:

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.
- La energía se conserva:

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.
- La energía se conserva: $H(u(t)) = H(u_0)$,

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.
- La energía se conserva: $H(u(t)) = H(u_0)$, donde

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.
- La energía se conserva: $H(u(t)) = H(u_0)$, donde

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \langle \phi_x; \phi_x \rangle + \frac{1}{2} \langle |x| \phi; \phi \rangle + \frac{1}{2\sigma + 2} \|u\|_{L^{2\sigma+2}(\mathbb{R})}^{2\sigma+2}$$

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.
- La energía se conserva: $H(u(t)) = H(u_0)$, donde

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \langle \phi_x; \phi_x \rangle + \frac{1}{2} \langle |x| \phi; \phi \rangle + \frac{1}{2\sigma + 2} \|u\|_{L^{2\sigma+2}(\mathbb{R})}^{2\sigma+2}$$

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2\sigma + 2} \|\phi\|_{L^{2\sigma+2}(\mathbb{R})}^{2\sigma+2}$$

Sabemos, ver [DLR '07]

- El problema está bien planteado.
- Existe única solución, definida para todo tiempo.
- Hay dependencia continua en dato inicial.
- La carga se conserva: $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$.
- La energía se conserva: $H(u(t)) = H(u_0)$, donde

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \langle \phi_x; \phi_x \rangle + \frac{1}{2} \langle |x| \phi; \phi \rangle + \frac{1}{2\sigma + 2} \|u\|_{L^{2\sigma+2}(\mathbb{R})}^{2\sigma+2}$$

$$H(\phi) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2\sigma + 2} \|\phi\|_{L^{2\sigma+2}(\mathbb{R})}^{2\sigma+2}$$

- La energía admite mínimos.

Esperamos

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

Esperamos

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$

Esperamos

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo,

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

$$CM(t) = \int x |u(x, t)|^2 dx$$

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

$$CM(t) = \int x |u(x, t)|^2 dx$$

oscile

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

$$CM(t) = \int x |u(x, t)|^2 dx$$

oscile (dentro de J).

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

$$CM(t) = \int x |u(x, t)|^2 dx$$

oscile (dentro de J).

- Alrededor del centro de masa del minimizante de la energía.

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

$$CM(t) = \int x |u(x, t)|^2 dx$$

oscile (dentro de J).

- Alrededor del centro de masa del minimizante de la energía. (Por simetría,

Por analogía con evoluciones en pozos de potencial:

- La carga $|u(x, t)|^2$ quede *localizada*.

$$\int_J |u(x, t)|^2 dx < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 - \varepsilon)$$

J intervalo fijo, $t > 0$ cualquiera.

- El centro de masa o primer momento

$$CM(t) = \int x |u(x, t)|^2 dx$$

oscile (dentro de J).

- Alrededor del centro de masa del minimizante de la energía. (Por simetría, alrededor del origen)

Resultados: Evolución de la distribución de cargas

Con el algoritmo *Evolucionador* obtuvimos:

Resultados: Evolución de la distribución de cargas

Con el algoritmo *Evolucionador* obtuvimos:

Resultados: Evolución del centro de masa

Con el algoritmo *Evolucionador* obtuvimos:

Resultados: Evolución del centro de masa

Con el algoritmo *Evolucionador* obtuvimos:

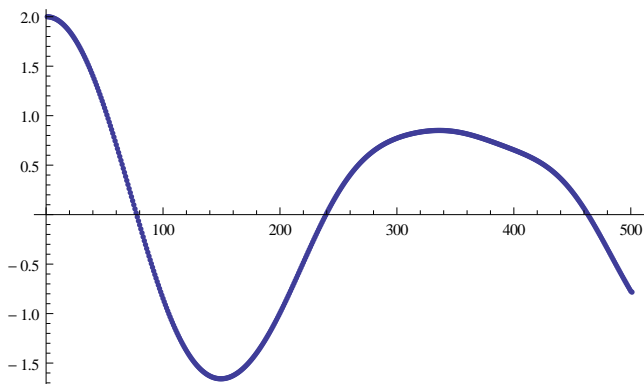


Figura: Oscilaciones del centro de masa

Resultados: Evolución de la carga total

Con el algoritmo *Evolucionador* obtuvimos:

Resultados: Evolución de la carga total

Con el algoritmo *Evolucionador* obtuvimos:

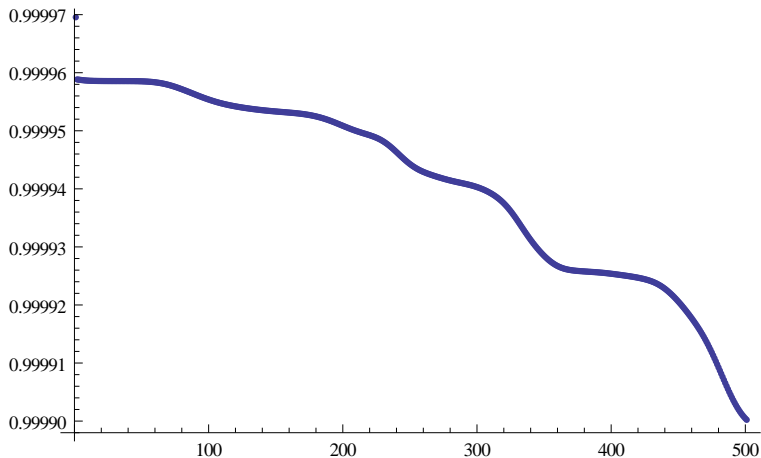


Figura: Conservación de la carga

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

$$(\text{PA}) \ v_t = A(v)$$

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

$$(PA) \ v_t = A(v) \quad y \quad (PB) \ w_t = B(w)$$

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

$$(PA) \ v_t = A(v) \quad y \quad (PB) \ w_t = B(w)$$

Se requiere que los flujos parciales:

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

$$(PA) \ v_t = A(v) \quad y \quad (PB) \ w_t = B(w)$$

Se requiere que los flujos parciales:

$$\Phi_A(v_0, t)$$

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

$$(PA) \ v_t = A(v) \quad y \quad (PB) \ w_t = B(w)$$

Se requiere que los flujos parciales:

$$\Phi_A(v_0, t) \quad y \quad \Phi_B(w_0, t)$$

Métodos de descomposición temporal: Marco general

Son aplicables para obtener numéricamente el flujo $\Phi_{A+B}(u_0, t)$ para:

$$u_t = A(u) + B(u),$$

a partir de los flujos de los problemas parciales:

$$(PA) \ v_t = A(v) \quad y \quad (PB) \ w_t = B(w)$$

Se requiere que los flujos parciales:

$$\Phi_A(v_0, t) \quad y \quad \Phi_B(w_0, t)$$

sean computables.

Strang:

Strang:

- Entrada:

Strang:

- Entrada: Dato inicial v_0 ,

Strang:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$

Strang:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle:

Strang:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle: $\Phi_{\text{Str}}(h) = \Phi_A(\Phi_B(\Phi_A(v_0, h/2), h), h/2)$

Strang:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle: $\Phi_{\text{Str}}(h) = \Phi_A(\Phi_B(\Phi_A(v_0, h/2), h), h/2)$
- Salida:

Strang:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle: $\Phi_{\text{Str}}(h) = \Phi_A(\Phi_B(\Phi_A(v_0, h/2), h), h/2)$
- Salida: $\Phi_{A+B}(v_0, t_f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{\text{Str}}(\cdots \Phi_{\text{Str}}(h) \cdots)$

Afín de orden 2:

Afín de orden 2:

- Entrada:

Afín de orden 2:

- Entrada: Dato inicial v_0 ,

Afín de orden 2:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$

Afín de orden 2:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle:

Afín de orden 2:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle: $\Phi_{Af2}(h) = \frac{1}{2} (\Phi_A(\Phi_B(v_0, h), h) + \Phi_B(\Phi_A(v_0, h), h))$

Afín de orden 2:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle: $\Phi_{Af2}(h) = \frac{1}{2} (\Phi_A(\Phi_B(v_0, h), h) + \Phi_B(\Phi_A(v_0, h), h))$
- Salida:

Afín de orden 2:

- Entrada: Dato inicial v_0 , tiempo final t_f , el paso $h = t_f/n$
- Bucle: $\Phi_{Af2}(h) = \frac{1}{2} (\Phi_A(\Phi_B(v_0, h), h) + \Phi_B(\Phi_A(v_0, h), h))$
- Salida: $\Phi_{A+B}(v_0, t_f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{Af2}(\cdots \Phi_{Af2}(h) \cdots)$

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.
- Autofunciones

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.
- Autofunciones $\{\varphi_1, \dots\}$.

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.
- Autofunciones $\{\varphi_1, \dots\}$.

El flujo puede expresarse usando

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.
- Autofunciones $\{\varphi_1, \dots\}$.

El flujo puede expresarse usando coeficientes de Fourier del dato inicial:

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.
- Autofunciones $\{\varphi_1, \dots\}$.

El flujo puede expresarse usando coeficientes de Fourier del dato inicial:

$$v_0 = \sum_{k \geq 1} \hat{v}_0(k) \varphi_k$$

Flujos parciales: expresión simbólica

Caso lineal: La ecuación genérica es $v_t = Av$.

Requiere conocer:

- Autovalores $\{\gamma_1, \dots\}$.
- Autofunciones $\{\varphi_1, \dots\}$.

El flujo puede expresarse usando coeficientes de Fourier del dato inicial:

$$v_0 = \sum_{k \geq 1} \hat{v}_0(k) \varphi_k$$

$$\Phi_A(v_0, t) = \sum_{k \geq 1} \hat{v}_0(k) e^{t\gamma_k} \varphi_k$$

Caso no lineal: caso por caso

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí,

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria:

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$
- Cumple una ley de conservación:

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$
- Cumple una ley de conservación: $|w(t)| = |w_0|.$

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$
- Cumple una ley de conservación: $|w(t)| = |w_0|.$
- La ecuación ordinaria queda:

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$
- Cumple una ley de conservación: $|w(t)| = |w_0|.$
- La ecuación ordinaria queda: $w_t = -i|w_0|^{2\sigma} w.$

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$
- Cumple una ley de conservación: $|w(t)| = |w_0|.$
- La ecuación ordinaria queda: $w_t = -i|w_0|^{2\sigma} w.$
- Cuya solución está dada por:

Caso no lineal: caso por caso

- Aquí, es la ecuación ordinaria: $w_t = -i|w|^{2\sigma} w.$
- Cumple una ley de conservación: $|w(t)| = |w_0|.$
- La ecuación ordinaria queda: $w_t = -i|w_0|^{2\sigma} w.$
- Cuya solución está dada por: $w(x, t) = w_0(x)e^{-it|w_0(x)|^{2\sigma}}.$

- $\Theta \in \mathbb{R}^N, N = 2n$

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$,

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$,

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Phi_{jk} = \phi_{j-1}(\Theta_k)$,

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Phi_{jk} = \phi_{j-1}(\Theta_k)$, donde $\phi_0(x), \dots, \phi_{M-1}(x)$ autofunciones.

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Phi_{jk} = \phi_{j-1}(\Theta_k)$, donde $\phi_0(x), \dots, \phi_{M-1}(x)$ autofunciones.
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1})$

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Phi_{jk} = \phi_{j-1}(\Theta_k)$, donde $\phi_0(x), \dots, \phi_{M-1}(x)$ autofunciones.
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1})$ matriz diagonal de autovalores.

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Phi_{jk} = \phi_{j-1}(\Theta_k)$, donde $\phi_0(x), \dots, \phi_{M-1}(x)$ autofunciones.
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1})$ matriz diagonal de autovalores.
- $\Omega = \text{diag}\left(\frac{\omega_1}{\phi_0(\Theta_1)}, \dots, \frac{\omega_N}{\phi_0(\Theta_N)}\right)$,

- $\Theta \in \mathbb{R}^N$, $N = 2n$ y $\{\Theta_{n+1}, \dots, \Theta_N\}$ son los nodos en $(0, +\infty)$.
- $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$, matriz diagonal con ω_{jj} peso asociado a Θ_j .
- $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$, $\Phi_{jk} = \phi_{j-1}(\Theta_k)$, donde $\phi_0(x), \dots, \phi_{M-1}(x)$ autofunciones.
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1})$ matriz diagonal de autovalores.
- $\Omega = \text{diag}(\frac{\omega_1}{\phi_0(\Theta_1)}, \dots, \frac{\omega_N}{\phi_0(\Theta_N)})$, matriz diagonal auxiliar.

Flujo lineal:

Flujos parciales *Evolucionador*: implementación

Flujo lineal:

Entrada:

$f \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ % Dato inicial
 $\delta > 0$ % Tamaño del paso

$p = \Phi^t \cdot \Omega \cdot f$ % Obtención coeficientes de Fourier
 $h = e^{-i\Lambda\delta} \cdot p$ % Evolución coef. Fourier a tiempo δ
 $g = \Phi \cdot h$ % Síntesis

Salida

$\text{LinEvol}(f, \delta) = g$ % Sale un vector $\in \mathbb{C}^{N \times 1}$

Flujo no lineal:

Flujos parciales *Evolucionador*: implementación

Flujo no lineal:

Entrada:

$f \in \mathbb{C}^N$	% Dato de entrada
$\sigma > 0$	% Interacción local
$\delta > 0$	% Tamaño del paso

$p = 2\sigma$	
$v = f ^p$	% $v_j = f_j ^p$
$h = \text{diag}(e^{-i\delta v})$	% $(e^{-i\delta v})_j = e^{-i\delta v_j}$

Salida:

$$\text{NoLinEvol}(f, \sigma, \delta) = h \cdot f$$

Muchas Gracias