

Reformulación de un problema de programación no lineal con restricciones multiobjetivo

V. Ramirez - R. Andreani - S. A. Santos

CRUB-UNCo

IMECC-UNICAMP

Introducción

El problema de interés en este trabajo tiene la siguiente estructura:

$$\begin{array}{ll} \min_x & F(x) \\ \text{s.a} & x \in \mathcal{X}^* \end{array}$$

donde $F : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{X}^* corresponde al conjunto de puntos solución del siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \min_x & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.a} & x \in X, \end{array}$$

donde $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, $f_i \forall i = 1, \dots, p$, funciones escalares, h y g funciones vectoriales y, todas funciones de clase C^1 en sus dominios.

Programación Multiobjetivo

Definición:

Um Problema Multiobjetivo (**PM**) en la forma padrón es definido como

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

donde $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$,

$$\mathcal{X} = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ representa el conjunto de las restricciones que no pueden ser expresadas en la forma funcional g , es llamada la **región factible**, o **espacio de decisiones**.

Definición:

La imagen de f ,

$$Im(f) = \{f(x) | x \in \mathcal{X}\}$$

es llamada el **espacio objetivo**.

Las coordenadas de $f(x)$, denotadas por $f_i(x) \forall i = 1, \dots, p$, son funciones escalares, llamadas **funciones-objetivo**.

Definición:

La imagen de f ,

$$Im(f) = \{f(x) | x \in \mathcal{X}\}$$

es llamada el **espacio objetivo**.

Las coordenadas de $f(x)$, denotadas por $f_i(x) \forall i = 1, \dots, p$, son funciones escalares, llamadas **funciones-objetivo**.

Definición:

Un punto $x^* \in \mathcal{X}$ se dice eficiente del **PM** si no existe otro $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f(x^*)$, esto es, $f_j(x) \leq f_j(x^*) \forall j = 1, \dots, p$ cumpliéndose la desigualdad estricta por lo menos para un j .

Vamos a llamar el conjunto de soluciones eficientes \mathcal{X}^* .

Puntos eficientes particulares: la tasa de variación en uno de los objetivos en relación a la variación de algún otro puede ser arbitrariamente grande (Geoffrion (1968)).

Puntos propiamente eficientes según Geoffrion

Definición: (Geoffrion)

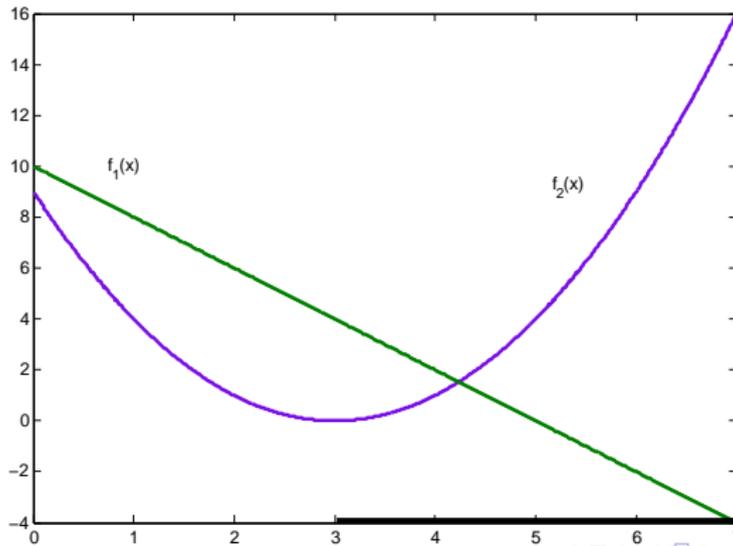
Decimos que $x^ \in \mathcal{X}^*$ es propiamente eficiente si existe un escalar $M > 0$ tal que para cada $i = 1, \dots, p$, y cada $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$, existe por lo menos un $j \neq i$ con $f_j(x) > f_j(x^*)$ y*

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M.$$

Una solución eficiente que no es propia decimos que es solución eficiente impropia.

Ejemplo:

Puntos propiamente eficientes



Introducción

Programación Multiobjetivo

Reformulación de un problema de PNL

Métodos Implementados

Resultados

Conclusiones y trabajo a futuro

Definición: Problema Multiobjetivo

Puntos propiamente eficientes

Estrategia para resolver el **PM**

Estrategia para resolver el **PM**

Problema de optimización escalar con pesos:

Sea $W = \{\omega \in \mathbb{R}^p \mid \omega_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^p \omega_j = 1\}$. Definimos para algún

$\omega \in W$ como $P(\omega)$:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{j=1}^p \omega_j f_j(x).$$

Teorema:

Sean $\alpha_j > 0$ ($j = 1, \dots, p$) fijos. Si x^* es óptimo en $P(\alpha)$ entonces x^* es propiamente eficiente en **(PM)**.

Teorema:

Sean $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, p$) fijos. Si x^* es óptimo en $P(\alpha)$ entonces x^* es propiamente eficiente en **(PM)**.

Corolario:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}_+^p$, si x^* es la única solución del problema $P(\alpha)$, entonces x^* es un punto eficiente para el problema **(PM)**.

Teorema:

Sea \mathcal{X} un conjunto convexo, y sean f_i convexas en \mathcal{X} . Entonces x^ es propiamente eficiente en **(PM)** si y solamente si x^* es óptimo en $P(\alpha)$ para algún α con componentes estrictamente positivas.*

Reformulación de un problema de PNL

Los problemas en los cuales estamos interesados tienen la siguiente estructura:

$$\begin{array}{ll} \min_x & F(x) \\ \text{s.a} & x \in \mathcal{X}^* \end{array}$$

donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{X}^* corresponde al conjunto de puntos solución del problema multiobjetivo

$$\begin{array}{ll} \min_x & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.a} & x \in X, \end{array}$$

donde $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$, $f_i \forall i = 1, \dots, p$, funciones escalares, h función vectorial, todas funciones con dominios convexos y de clase C^1 en ellos.

Dado un vector de tolerancias $\epsilon \in \mathbb{R}_{++}^p$, el problema anterior transformado resulta:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, x} \quad & F(x) \\ \text{s. a} \quad & \alpha_j > \epsilon_j, \quad \forall j = 1, \dots, p \\ & \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = \arg \min_x \quad & \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x) \\ \text{s. a} \quad & h(x) = 0, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Métodos Implementados

Para la resolución de este tipo de problemas, proponemos tres métodos:

Método 1: Restauración Inexacta 1 (RI1).

Método 2: Restauración Inexacta 2 (RI2).

Método 3: Reformulación KKT.

Método 1: Restauración Inexacta 1

Fase de Restauración: En esta fase, se busca x' y los multiplicadores de Lagrange μ' , γ' para el siguiente problema parametrizado en $\bar{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^p \bar{\alpha}_i f_i(x) \\ \text{s. a} \quad & h(x) = 0, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

llamaremos el punto obtenido en la fase de restauración $y = (\bar{\alpha}, x', \mu', \gamma')$ punto intermedio, $\omega = (\alpha, x, \mu, \gamma)$ y $C(\omega) = 0$ las condiciones KKT del problema de segundo nivel en el punto ω .

$\mathcal{C}(\omega) = 0$ el sistema de ecuaciones no lineales formado por las restricciones $C(x) = 0$ junto con la restricción referente al vector de los alfas: $\sum_{i=1}^p \alpha_i - 1 = 0$ y $\Upsilon = \mathbb{R}^p \times \Omega \times \Delta$ con $(\mu, \gamma) \in \Delta \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n$.

Fase de optimalidad:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & L(\omega, \lambda) \\ \text{s. a} \quad & w \in \pi(y) \cap B(y) \\ & \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \\ & x \geq 0, \alpha \geq \epsilon, \end{aligned}$$

donde $L(\omega, \lambda) = F(x) + \mathcal{C}(\omega)^T \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^{2n+m+1}$, $B(y)$ es una región de confianza alrededor del punto y , $\epsilon \in \mathbb{R}^p$ fijo y $\pi(y) = \{z \in \Upsilon \mid C'(y)(z - y) = 0\}$.

Método 2: Restauración Inexacta 2 Este método es una variante del anterior. La fase de optimalidad resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & F(w) \\ \text{s. a} \quad & w \in \pi(y) \cap B(y) \\ & \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \\ & x \geq 0, \alpha \geq \epsilon, \end{aligned}$$

donde, w y Υ están definidos como en el método anterior, $\pi(y) = \{z \in \Upsilon \mid C'(y)(z - y) = 0\}$, $B(y)$ es una región de confianza alrededor del punto y , $\epsilon \in \mathbb{R}_{++}^p$ fijo.

Método 3: Reformulación KKT

Aquí se minimiza la función de primer nivel sujeta a las condiciones KKT del segundo nivel:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, x, \mu, \gamma} && F(x) \\ & \text{s. a} && x \in \Omega \\ & && \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \\ & && \alpha \in \mathbb{R}^p, \quad \gamma \in \mathbb{R}^n \\ & && \alpha > \epsilon \\ & && \sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla f_i(x) + \nabla h(x) \mu - \gamma = 0 \\ & && h(x) = 0 \\ & && \gamma_i x_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ & && x_i \geq 0, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- La gran ventaja de los métodos que usan RI es que ellos consideran la estructura del problema de segundo nivel, mientras que la reformulación *KKT* no.

Experimentos computacionales

- Los problemas fueron divididos en dos grandes grupos:
 - Cantidad de funciones objetivo del PM es fija así como la cantidad de variables del problema.
 - Cantidad de funciones objetivo del PM es variable.
- Además de eso, cada grupo fue diferenciado por tener restricciones el PM o no, además de la caja.

Problema:

Función objetivo: $F(x) = x_1^2 + x_2^2$

Problema multiobjetivo:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s. a} & x_2 + \frac{2}{5}x_1 \leq 2 \\ & 5x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2) &= (x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2, \quad \forall i = 1, \dots, p \\ a_i &= 2 \cos(\theta_i) + 1 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ b_i &= 2 \sin(\theta_i) + 1 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ \theta_i &= \frac{2\pi}{p}(i - 1) \end{aligned}$$

$$\Omega^* = \{(0, 0)\}.$$

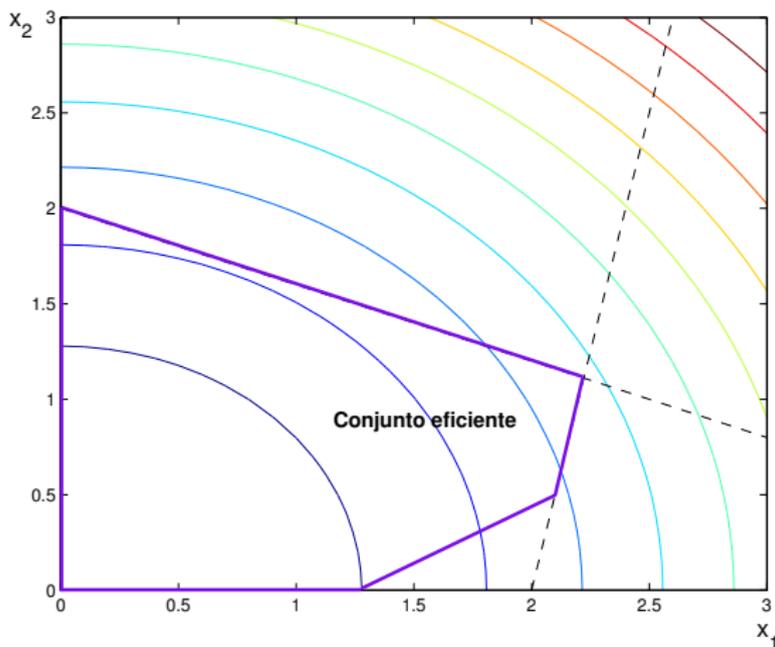


Figura: Ilustración de \mathcal{X}^* , con $p = 3$.

- Para resolver la fase de restauración comenzamos usando Restauración Exacta.
- Con ciertos puntos iniciales el punto obtenido en la fase de restauración era el mismo que el punto obtenido en la fase de optimalidad.
- El punto satisface la complementariedad estricta, pero desde el punto de vista de la decisión original, corresponde a un punto malo.

Pregunta: ¿Cuál fue la estrategia que usamos para contornar esta dificultad?

Pregunta: ¿Cuál fue la estrategia que usamos para contornar esta dificultad?

Respuesta: Usamos RI para resolver la fase de restauración, esto es, hallamos el punto intermedio inexactamente sin agregar variables de holgura en las restricciones de desigualdad, luego perturbamos las restricciones de complementariedad.

- El valor de la perturbación es dado por: $\zeta = x \cdot \gamma / n$, donde x representa las variables primales y γ las variables duales del problema de segundo nivel. Así la complementariedad

$$x_i \gamma_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

resulta

$$x_i \gamma_i - \zeta = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

luego $x_i^k \neq 0$ e $\gamma_i^k \neq 0 \quad \forall i$,

- Luego en la linealización de esta ecuación los valores de x_i o γ_i no son forzados a ser cero como sucedió con el problema anterior.

Luego surgieron dos variantes para los Métodos 1 y 2:

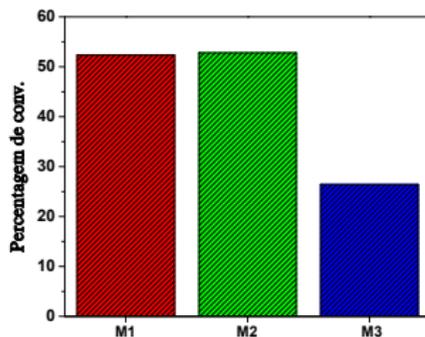
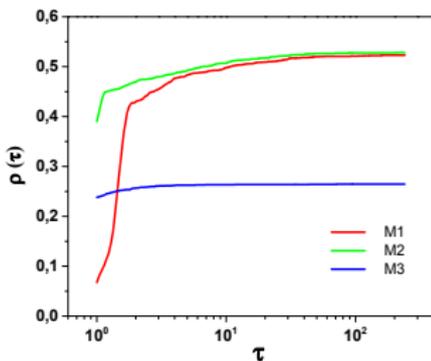
- Variante 1:** Resolver la fase de restauración usando *Restauración Exacta*, que corresponde al propio método de *Restauración Inexacta* y llamamos esta variante simplemente de RI.
- Variante 2:** Resolver la fase de restauración usando *Restauración Inexacta* y perturbar la restricción de complementariedad asociada al problema de nivel inferior, a esta variante la llamamos *Restauración Inexacta Perturbada (RIP)*.

Resultados

- En los experimentos preliminares, los tres métodos obtuvieron la solución del problema, mas cuando los problemas aumentaron su complejidad los Métodos 1 y 2 fueron mejores.
- Para los tests de los experimentos sistematizados elegimos tres conjuntos de valores diferentes para las dimensiones de los vectores α y x , es decir para p y n .
- Para cada uno, generamos 100 puntos iniciales de tres maneras diferentes.

Gráficos de desempeño y porcentajes de convergencia

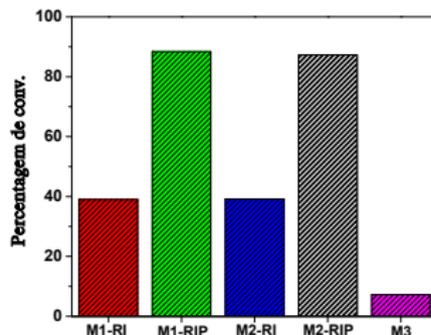
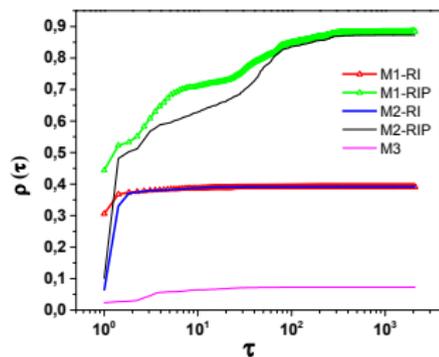
- A seguir se muestra el perfil de desempeño de los tiempos de CPU utilizado por los tres métodos para satisfacer nuestros criterios de convergencia, conforme es presentado por Dolan e Moré.
- La curva dibujada representa la función de distribución acumulativa de desempeño del tiempo de CPU.



(a) Perfil de desempeño: tiempo de CPU

(b) Porcentaje de convergencia

Figura: Gráficos para problemas sistematizados sin restricciones.



(a) Perfil de desempeño: tiempo de CPU

(b) Porcentaje de convergencia

Figura: Gráficos para problemas sistematizado con restricciones.

Conclusiones y trabajo a futuro

- Concluimos así, que utilizar RI es mejor que utilizar la reformulación KKT.
- En el caso de existir restricciones es preferible utilizar RIP, pues, es posible contornar los puntos indeseables y llegar a la solución del problema.
- La estrategia de transformar el PM en un problema escalar adecuado es muy favorable, porque permite abordar el problema vectorial con muchos objetivos, lo que en general no es posible por la complejidad que esto involucra.

- También permite utilizar métodos de programación no lineal para resolver los problemas vectoriales a diferencia de la mayoría de las propuestas que utilizan modelos heurísticos para resolverlos.
- Como trabajo a futuro, pensamos en investigar las propiedades de la homotopía usada en la perturbación de forma exhaustiva en otros problemas.

Muchas gracias por su atención!

FIN!

Tablas comparativas

	Método 1	Método 2	Método 3
(p, n)	PUNTOS AGP		PUNTOS KKT
(5, 10)	48.11%	48.88%	38.22%
(10, 15)	51.66%	51.88%	24.44%
(15, 30)	57.22%	57.66%	16.66%

Tabela: Tabla comparativa separando por dimensión. Problemas sin restricciones.

	Método 1	Método 2	Método 3
Inicialización	PUNTOS AGP		PUNTOS KKT
(a)	58.77%	59.88%	27.44%
(b)	56.11%	56.55%	16.22%
(c)	42.11%	42.22%	35.66%

Tabela: Tabla comparativa agrupando las dimensiones y separando por la inicialización adoptada. Problemas sin restricciones.

	Método 1		Método 2		Método 3
	RI	RIP	RI	RIP	
(p, n)	PUNTOS AGP				PUNTOS KKT
(5, 10)	37%	86.33%	37.11%	86.55%	15%
(10, 15)	44.44%	85.88%	44.77%	84.55%	4.44%
(15, 30)	35.55%	93%	35.55%	90.66%	2.33%

Tabela: Tabla comparativa separando por dimensión. Problemas con restricciones.

	Método 1		Método 2		Método 3
	RI	RIP	RI	RIP	
Inicialização	PUNTOS AGP				PUNTOS KKT
(a)	37.33%	88.44%	37.33%	86.33%	19.11%
(b)	17.33%	96.55%	17.66%	95.44%	2.33%
(c)	62.33%	80.22%	62.44%	80%	0.33%

Tabela: Tabla comparativa agrupando las dimensiones y separando por la inicialización adoptada. Problemas con restricciones.