Estimación anisotrópica del error de interpolación bajo la doble condición del ángulo.

Gabriel Monzón

Universidad Nacional de General Sarmiento (Investigador-docente del Instituto de Ciencias)
Universidad de Buenos Aires (Estudiante de doctorado)

Estimación clásica del error.

Denotaremos por K a un cuadrilátero convexo arbitrario.

Estimación clásica del error.

Denotaremos por K a un cuadrilátero convexo arbitrario.

La estimación clásica del error en la seminorma de H^1 usualmente se escribe como

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}, \tag{1}$$

donde Q denota al operador de interpolación de Lagrange de primer orden y h es el diámetro de K.

Denotaremos por K a un cuadrilátero convexo arbitrario.

La estimación clásica del error en la seminorma de H^1 usualmente se escribe como

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}, \tag{1}$$

donde Q denota al operador de interpolación de Lagrange de primer orden y h es el diámetro de K.

- Se quiere que la constante C sea independiente de K.

Estimación clásica del error.

Denotaremos por K a un cuadrilátero convexo arbitrario.

La estimación clásica del error en la seminorma de H^1 usualmente se escribe como

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}, \quad (1)$$

donde Q denota al operador de interpolación de Lagrange de primer orden y h es el diámetro de K.

- Se quiere que la constante C sea independiente de K.
- La convexidad de K no es suficiente para tener C uniformemente acotada.

Estimación clásica del error.

Denotaremos por K a un cuadrilátero convexo arbitrario.

La estimación clásica del error en la seminorma de H^1 usualmente se escribe como

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}, \tag{1}$$

donde Q denota al operador de interpolación de Lagrange de primer orden y h es el diámetro de K.

- Se quiere que la constante C sea independiente de K.
- La convexidad de K no es suficiente para tener C uniformemente acotada.
- Muchas condiciones sobre la geometría del elemento han sido introducidas a lo largo del tiempo entre las cuales destacamos:

Denotaremos por K a un cuadrilátero convexo arbitrario.

La estimación clásica del error en la seminorma de H^1 usualmente se escribe como

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}, \tag{1}$$

donde Q denota al operador de interpolación de Lagrange de primer orden y h es el diámetro de K.

- Se quiere que la constante C sea independiente de K.
- La convexidad de K no es suficiente para tener C uniformemente acotada.
- Muchas condiciones sobre la geometría del elemento han sido introducidas a lo largo del tiempo entre las cuales destacamos:
  - La *condición de regularidad*: existe una constante σ que verifica

    $$\frac{h}{\rho} \leq \sigma \tag{2}$$

    siendo ρ el diámetro de la bola más grande contenida en K (escribiremos $Reg(\sigma)$ cuando (2) suceda).

- La *doble condición del ángulo*: existen constantes ψ_m y ψ_M tales que, cualquiera sea el ángulo interior θ de K, se verifica

$$\overbrace{0 < \psi_m \leq \theta}^{mac(\psi_m)} \underbrace{\leq \psi_M < \pi}_{MAC(\psi_M)}.$$

Cuando esta condición se cumpla escribiremos $DAC(\psi_m, \psi_M)$.

- La *doble condición del ángulo*: existen constantes ψ_m y ψ_M tales que, cualquiera sea el ángulo interior θ de K, se verifica

$$\overbrace{0 < \psi_m \leq \theta}^{mac(\psi_m)} \underbrace{\leq \psi_M < \pi}_{MAC(\psi_M)}.$$

Cuando esta condición se cumpla escribiremos $DAC(\psi_m, \psi_M)$.

$$Reg \Rightarrow mac; \quad \text{sin embargo,} \quad Reg \not\Rightarrow DAC$$

- La *doble condición del ángulo*: existen constantes ψ_m y ψ_M tales que, cualquiera sea el ángulo interior θ de K, se verifica

$$0 < \overbrace{\psi_m \leq \theta}^{mac(\psi_m)} \underbrace{\leq \psi_M < \pi}_{MAC(\psi_M)}.$$

Cuando esta condición se cumpla escribiremos $DAC(\psi_m, \psi_M)$.

$$Reg \Rightarrow mac; \quad \text{sin embargo,} \quad Reg \not\Rightarrow DAC$$

$$DAC \not\Rightarrow Reg$$

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $Reg(\sigma)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\sigma)$.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $Reg(\sigma)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\sigma)$.

[J] JAMET, P.: Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles, SIAM J. Numer. Anal., 14, 925-930 (1977).

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $Reg(\sigma)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\sigma)$.

[J] JAMET, P.: Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles, SIAM J. Numer. Anal., 14, 925-930 (1977).

[AD] ACOSTA G., DURÁN R. G.: Error estimates for Q_1 isoparametric elements satisfying a weak angle condition, SIAM J. Numer. Anal., 38, 1073-1088 (2000).

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $Reg(\sigma)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\sigma)$.

[J] JAMET, P.: Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles, SIAM J. Numer. Anal., 14, 925-930 (1977).

[AD] ACOSTA G., DURÁN R. G.: Error estimates for Q_1 isoparametric elements satisfying a weak angle condition, SIAM J. Numer. Anal., 38, 1073-1088 (2000).

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $Reg(\sigma)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\sigma)$.

[J] JAMET, P.: Estimation of the interpolation error for quadrilateral finite elements which can degenerate into triangles, SIAM J. Numer. Anal., 14, 925-930 (1977).

[AD] ACOSTA G., DURÁN R. G.: Error estimates for Q_1 isoparametric elements satisfying a weak angle condition, SIAM J. Numer. Anal., 38, 1073-1088 (2000).

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la estimación clásica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq Ch|u|_{H^2(K)}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$.

[AM] ACOSTA G., MONZÓN G.: Interpolation error estimates in $W^{1,p}$ for degenerate Q_1 isoparametric elements, Numer. Math., 104, 129-150 (2006).

Estimación anisotrópica del error.

Diremos que K es una *perturbación de un rectángulo* si existe $F_K : \widehat{K} = [0,1]^2 \to K$ tal que

$$F_K(\hat{x},\hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + \sum_{i=1}^{4} a^{(i)}\widehat{\phi}_i(\hat{x},\hat{y}) \qquad (b \leq a)$$

donde $\widehat{\phi}_i$ denota la función base sobre $\widehat{K}$ asociada al vértice $\hat{V}_i$

Estimación anisotrópica del error.

Diremos que K es una *perturbación de un rectángulo* si existe $F_K : \widehat{K} = [0,1]^2 \to K$ tal que

$$F_K(\hat{x},\hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + \sum_{i=1}^{4} a^{(i)}\widehat{\phi}_i(\hat{x},\hat{y}) \qquad (b \leq a)$$

donde $\widehat{\phi}_i$ denota la función base sobre $\widehat{K}$ asociada al vértice $\hat{V}_i$ y, para los vectores distorsivos $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, existen constantes a_0, a_1, a_2 que verifican

$$|a_i^{(j)}| \leq a_i b, \quad 0 \leq a_i \lesssim 1, \quad i = 1,2, \; j = 1,\ldots,4, \tag{3}$$

Estimación anisotrópica del error.

Diremos que K es una *perturbación de un rectángulo* si existe $F_K : \widehat{K} = [0,1]^2 \to K$ tal que

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + \sum_{i=1}^{4} a^{(i)} \widehat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \qquad (b \leq a)$$

donde $\widehat{\phi}_i$ denota la función base sobre $\widehat{K}$ asociada al vértice $\hat{V}_i$ y, para los vectores distorsivos $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, existen constantes a_0, a_1, a_2 que verifican

$$|a_i^{(j)}| \leq a_i b, \quad 0 \leq a_i \lesssim 1, \quad i = 1, 2, \; j = 1, \ldots, 4, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{a} a_1 - a_2 \geq a_0 > 0. \tag{4}$$

Estimación anisotrópica del error.

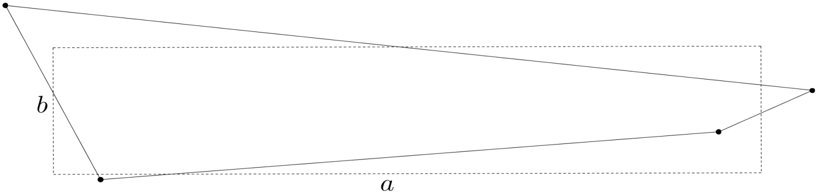
Diremos que K es una *perturbación de un rectángulo* si existe $F_K : \widehat{K} = [0,1]^2 \to K$ tal que

$$F_K(\hat{x},\hat{y}) = (a\hat{x}, b\hat{y}) + \sum_{i=1}^{4} a^{(i)} \widehat{\phi}_i(\hat{x},\hat{y}) \qquad (b \leq a)$$

donde $\widehat{\phi}_i$ denota la función base sobre $\widehat{K}$ asociada al vértice $\hat{V}_i$ y, para los vectores distorsivos $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$, existen constantes a_0, a_1, a_2 que verifican

$$|a_i^{(j)}| \leq a_i b, \quad 0 \leq a_i \lesssim 1, \quad i = 1,2,\ j = 1,\ldots,4, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{a} a_1 - a_2 \geq a_0 > 0. \tag{4}$$



Si K es la perturbación de un rectángulo en el sentido antes descrito, entonces K verifica la DAC.

Si K es la perturbación de un rectángulo en el sentido antes descrito, entonces K verifica la DAC.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo (3) *y* (4) *vale la siguiente estimación anisotrópica del error*

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[a \left\| \partial_{x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)} + b \left\| \partial_{x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \right] \tag{5}$$

para alguna constante positiva $C := C(a_0, a_1, a_2)$.

Si K es la perturbación de un rectángulo en el sentido antes descrito, entonces K verifica la DAC.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo (3) y (4) vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[a \left\| \partial_{x_1} \nabla u \right\|_{L^2(K)} + b \left\| \partial_{x_2} \nabla u \right\|_{L^2(K)} \right] \tag{5}$$

para alguna constante positiva $C := C(a_0, a_1, a_2)$.

[Ap] APEL TH.: Anisotropic finite elements: Local estimates and applications. Adv. in Num. Math., B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig (1999).

Principales resultados.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo la doble condición del ángulo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \tag{6}$$

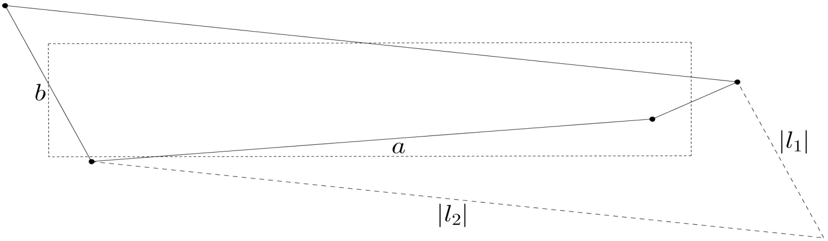
para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$ donde l_1 y l_2 son dos lados adyacentes de K tal que el paralelogramo generado por l_1 y l_2 contiene enteramente a K.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo la doble condición del ángulo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \tag{6}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$ donde l_1 y l_2 son dos lados adyacentes de K tal que el paralelogramo generado por l_1 y l_2 contiene enteramente a K.



Para elementos lo suficientemente *chatos* (anisotrópicos) se tiene la siguiente caracterización:

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es la perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Esquema de prueba.

Convenciones:

Esquema de prueba.

Convenciones:

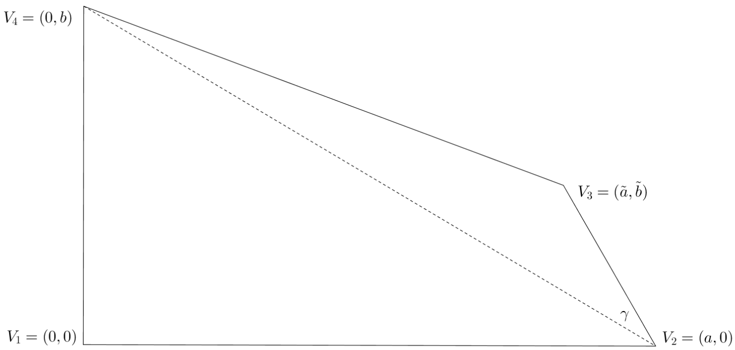
- Diremos que dos cuadriláteros K_1 y K_2 son *equivalentes*, $K_1 \sim K_2$, si existe un mapeo lineal L determinado por una matriz B satisfaciendo $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$ para alguna constante C tal que $L(K_1) = K_2$.

Esquema de prueba.

Convenciones:

- Diremos que dos cuadriláteros K_1 y K_2 son *equivalentes*, $K_1 \sim K_2$, si existe un mapeo lineal L determinado por una matriz B satisfaciendo $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$ para alguna constante C tal que $L(K_1) = K_2$.

- Usaremos $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ para denotar al cuadrilátero convexo de vértices $V_1 = (0, 0)$, $V_2 = (a, 0)$, $V_3 = (\tilde{a}, \tilde{b})$ y $V_4 = (0, b)$.



Proposición

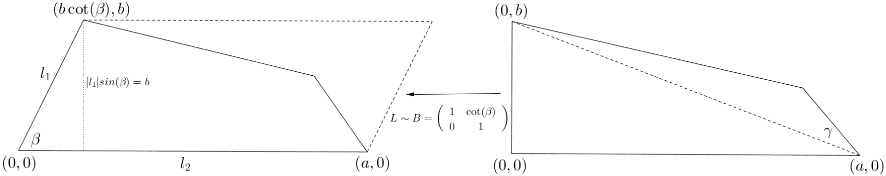
Sea K un cuadrilátero arbitrario. Entonces K satisface $DAC(\psi_m, \psi_M)$, si y sólo si, es equivalente a un elemento $\overline{K} = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando

$$(D1) \qquad \tilde{a}/a \leq 1, \quad \tilde{b}/b \leq 1 \tag{7}$$

y

$$(D2') \qquad \frac{1}{\sin(\gamma)} \leq C \tag{8}$$

donde C es una constante positiva y γ es el ángulo señalado en la figura.



Dado que $l_1 = (a, 0)$ y $l_2 = (b\cot(\beta), b)$, es inmediato verificar

$$a\partial_{\overline{x}_1}\overline{v} = l_1 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_1|\partial_{l_1} v \circ L \quad \text{y} \quad b\partial_{\overline{x}_2}\overline{v} = l_2 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_2|\partial_{l_2} v \circ L.$$

Dado que $l_1 = (a, 0)$ y $l_2 = (b\cot(\beta), b)$, es inmediato verificar

$$a\partial_{\overline{x}_1}\overline{v} = l_1 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_1|\partial_{l_1} v \circ L \quad \text{y} \quad b\partial_{\overline{x}_2}\overline{v} = l_2 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_2|\partial_{l_2} v \circ L.$$

Cambiando variables sigue que

$$a \left\|\partial_{\overline{x}_1}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b \left\|\partial_{\overline{x}_2}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} = |l_1| \left\|\partial_{l_1} v\right\|_{L^2(K)} + |l_2| \left\|\partial_{l_2} v\right\|_{L^2(K)}$$

Dado que $l_1 = (a, 0)$ y $l_2 = (b\cot(\beta), b)$, es inmediato verificar

$$a\partial_{\overline{x}_1}\overline{v} = l_1 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_1|\partial_{l_1} v \circ L \quad \text{y} \quad b\partial_{\overline{x}_2}\overline{v} = l_2 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_2|\partial_{l_2} v \circ L.$$

Cambiando variables sigue que

$$a\left\|\partial_{\overline{x}_1}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b\left\|\partial_{\overline{x}_2}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} = |l_1|\left\|\partial_{l_1} v\right\|_{L^2(K)} + |l_2|\left\|\partial_{l_2} v\right\|_{L^2(K)}$$

Lema

Sean K, $\overline{K}$ dos cuadriláteros convexos, y sea $L : K \to \overline{K}$ un mapeo afín $L(X) = BX + P$. Asumamos que $L(K) = \overline{K}$, $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$. Si $\overline{Q}$ denota la $\mathcal{Q}_1$-interpolación sobre $\overline{K}$ y $\overline{u} = u \circ L^{-1}$ entonces

$$C_1|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})} \leq |u - Qu|_{H^1(K)} \leq C_2|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})}.$$

Dado que $l_1 = (a, 0)$ y $l_2 = (b\cot(\beta), b)$, es inmediato verificar

$$a\partial_{\overline{x}_1}\overline{v} = l_1 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_1|\partial_{l_1} v \circ L \quad \text{y} \quad b\partial_{\overline{x}_2}\overline{v} = l_2 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_2|\partial_{l_2} v \circ L.$$

Cambiando variables sigue que

$$a\left\|\partial_{\overline{x}_1}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b\left\|\partial_{\overline{x}_2}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} = |l_1|\left\|\partial_{l_1} v\right\|_{L^2(K)} + |l_2|\left\|\partial_{l_2} v\right\|_{L^2(K)}$$

Lema

Sean K, $\overline{K}$ dos cuadriláteros convexos, y sea $L : K \to \overline{K}$ un mapeo afín $L(X) = BX + P$. Asumamos que $L(K) = \overline{K}$, $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$. Si $\overline{Q}$ denota la $\mathcal{Q}_1$-interpolación sobre $\overline{K}$ y $\overline{u} = u \circ L^{-1}$ entonces

$$C_1|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})} \le |u - Qu|_{H^1(K)} \le C_2|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})}.$$

Finalmente, si la siguiente estimación anisotrópica del error valiera sobre $\overline{K}$

$$|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})} \le C_1\left[a\left\|\partial_{\overline{x}_1}\nabla\overline{u}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b\left\|\partial_{\overline{x}_2}\nabla\overline{u}\right\|_{L^2(\overline{K})}\right],$$

Dado que $l_1 = (a, 0)$ y $l_2 = (b\cot(\beta), b)$, es inmediato verificar

$$a\partial_{\overline{x}_1}\overline{v} = l_1 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_1|\partial_{l_1} v \circ L \quad \text{y} \quad b\partial_{\overline{x}_2}\overline{v} = l_2 \cdot (\nabla v \circ L) = |l_2|\partial_{l_2} v \circ L.$$

Cambiando variables sigue que

$$a\left\|\partial_{\overline{x}_1}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b\left\|\partial_{\overline{x}_2}\overline{v}\right\|_{L^2(\overline{K})} = |l_1|\left\|\partial_{l_1} v\right\|_{L^2(K)} + |l_2|\left\|\partial_{l_2} v\right\|_{L^2(K)}$$

Lema

Sean K, $\overline{K}$ dos cuadriláteros convexos, y sea $L : K \to \overline{K}$ un mapeo afín $L(X) = BX + P$. Asumamos que $L(K) = \overline{K}$, $\|B\|, \|B^{-1}\| < C$. Si $\overline{Q}$ denota la $\mathcal{Q}_1$-interpolación sobre $\overline{K}$ y $\overline{u} = u \circ L^{-1}$ entonces

$$C_1|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})} \leq |u - Qu|_{H^1(K)} \leq C_2|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})}.$$

Finalmente, si la siguiente estimación anisotrópica del error valiera sobre $\overline{K}$

$$|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})} \leq C_1\left[a\left\|\partial_{\overline{x}_1}\nabla\overline{u}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b\left\|\partial_{\overline{x}_2}\nabla\overline{u}\right\|_{L^2(\overline{K})}\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C_0|\overline{u} - \overline{Q}\overline{u}|_{H^1(\overline{K})} &\leq C_1\left[a\left\|\partial_{\overline{x}_1}\nabla\overline{u}\right\|_{L^2(\overline{K})} + b\left\|\partial_{\overline{x}_2}\nabla\overline{u}\right\|_{L^2(\overline{K})}\right] \\ &= C_1\left[|l_1|\left\|\partial_{l_1}\nabla u\right\|_{L^2(K)} + |l_2|\left\|\partial_{l_2}\nabla u\right\|_{L^2(K)}\right].\end{aligned}$$

Lema

Para cualquier cuadrilátero convexo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ *satisfaciendo* $[D1, D2']$, *existe otro elemento equivalente del mismo tipo que también satisface* $[D1, D2']$ *(con las mismas constantes), para el cual* $\frac{\tilde{a}}{a} \geq \frac{1}{2}$.

2. Algunas consideraciones geométricas extra.

Lema

Para cualquier cuadrilátero convexo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ *satisfaciendo* $[D1, D2']$*, existe otro elemento equivalente del mismo tipo que también satisface* $[D1, D2']$ *(con las mismas constantes), para el cual* $\frac{\tilde{a}}{a} \geq \frac{1}{2}$.

Lema

Sea $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ *un cuadrilátero convexo verificando* $[D1, D2']$*, entonces* $b \leq Ca$.

Lema

Para cualquier cuadrilátero convexo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ satisfaciendo $[D1, D2']$, existe otro elemento equivalente del mismo tipo que también satisface $[D1, D2']$ (con las mismas constantes), para el cual $\frac{\tilde{a}}{a} \geq \frac{1}{2}$.

Lema

Sea $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ un cuadrilátero convexo verificando $[D1, D2']$, entonces $b \leq Ca$.

Gracias a los lemas previos, si $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ satisface $[D1, D2']$, asumiremos

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \quad \tilde{b}/b \leq 1 \quad \text{y} \quad b/a \leq C. \tag{9}$$

Lema

Si K verifica $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces K es equivalente a un cuadrilátero del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ el cual satisface alguna de las siguientes condiciones

(1) *es regular cuando $a \sim b$ o*

(2) *degenera en el rectángulo anisotrópico $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ cuando $b << a$.*

Lema

Si K verifica $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces K es equivalente a un cuadrilátero del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ el cual satisface alguna de las siguientes condiciones

(1) *es regular cuando $a \sim b$ o*

(2) *degenera en el rectángulo anisotrópico $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ cuando $b << a$.*

Demostración. Ya vimos que K es equivalente a un elemento del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $[D1, D2']$ para el cual

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \quad \tilde{b}/b \leq 1 \quad \text{y} \quad b/a \leq C.$$

Lema

Si K verifica $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces K es equivalente a un cuadrilátero del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ el cual satisface alguna de las siguientes condiciones

(1) *es regular cuando $a \sim b$ o*

(2) *degenera en el rectángulo anisotrópico $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ cuando $b << a$.*

Demostración. Ya vimos que K es equivalente a un elemento del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $[D1, D2']$ para el cual

$$1/2 \le \tilde{a}/a \le 1, \quad \tilde{b}/b \le 1 \quad \text{y} \quad b/a \le C.$$

Si $a \sim b$, el triángulo $\Delta(V_1V_2V_4)$ es regular y está contenido en $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$; por lo tanto, $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es regular.

Lema

Si K verifica $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces K es equivalente a un cuadrilátero del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ el cual satisface alguna de las siguientes condiciones

(1) *es regular cuando $a \sim b$ o*

(2) *degenera en el rectángulo anisotrópico $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ cuando $b << a$.*

Demostración. Ya vimos que K es equivalente a un elemento del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $[D1, D2']$ para el cual

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \quad \tilde{b}/b \leq 1 \quad \text{y} \quad b/a \leq C.$$

Si $a \sim b$, el triángulo $\Delta(V_1 V_2 V_4)$ es regular y está contenido en $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$; por lo tanto, $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es regular. Si a y b no son comparables, podemos asumir $\frac{a}{b} \to \infty$.

Lema

Si K verifica $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces K es equivalente a un cuadrilátero del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ el cual satisface alguna de las siguientes condiciones

(1) *es regular cuando $a \sim b$ o*

(2) *degenera en el rectángulo anisotrópico $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ cuando $b << a$.*

Demostración. Ya vimos que K es equivalente a un elemento del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $[D1, D2']$ para el cual

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \quad \tilde{b}/b \leq 1 \quad \text{y} \quad b/a \leq C.$$

Si $a \sim b$, el triángulo $\Delta(V_1V_2V_4)$ es regular y está contenido en $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$; por lo tanto, $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es regular. Si a y b no son comparables, podemos asumir $\frac{a}{b} \to \infty$. Sea δ el ángulo entre V_1V_4 y V_2V_4, entonces $\tan(\delta) = \frac{a}{b}$ por lo que $\delta \to \frac{\pi}{2}$. Dado que $\delta \leq \beta_4 \leq \frac{\pi}{2}$ siendo β_4 el ángulo interior de $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ en V_4, sigue que $\beta_4 \to \pi/2$, o sea $\tilde{b} \to b$.

Lema

Si K verifica $DAC(\psi_m, \psi_M)$ entonces K es equivalente a un cuadrilátero del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ el cual satisface alguna de las siguientes condiciones

(1) *es regular cuando $a \sim b$ o*

(2) *degenera en el rectángulo anisotrópico $R_{ab} = K(a, b, a, b)$ cuando $b << a$.*

Demostración. Ya vimos que K es equivalente a un elemento del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $[D1, D2']$ para el cual

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \quad \tilde{b}/b \leq 1 \quad \text{y} \quad b/a \leq C.$$

Si $a \sim b$, el triángulo $\Delta(V_1 V_2 V_4)$ es regular y está contenido en $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$; por lo tanto, $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es regular. Si a y b no son comparables, podemos asumir $\frac{a}{b} \to \infty$. Sea δ el ángulo entre V_1V_4 y V_2V_4, entonces $\tan(\delta) = \frac{a}{b}$ por lo que $\delta \to \frac{\pi}{2}$. Dado que $\delta \leq \beta_4 \leq \frac{\pi}{2}$ siendo β_4 el ángulo interior de $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ en V_4, sigue que $\beta_4 \to \pi/2$, o sea $\tilde{b} \to b$.

Sea ω el ángulo entre V_2V_3 y $V_3(\tilde{a}, 0)$; entonces $\tan(\omega) = \frac{a - \tilde{a}}{\tilde{b}} \geq \frac{a}{b}\left(1 - \frac{\tilde{a}}{a}\right)$. Como $\omega \leq C_\psi < \frac{\pi}{2}$ (gracias a que $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verifica la MAC) sigue que $\frac{a}{b}\left(1 - \frac{\tilde{a}}{a}\right) \leq C$ para alguna constante C; por lo tanto, $1 - \tilde{a}/a \to 0$ (o sea $\tilde{a} \to a$). $\square$

4. Concluyendo resultados.

La estimación anisotrópica tiene sentido en elementos que no son regulares y, bajo la DAC, podemos reducir el estudio a elementos del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1$ y $\tilde{b}/b \leq 1$ con $b << a$. Asumiremos $(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq (a, b)$.

4. Concluyendo resultados.

La estimación anisotrópica tiene sentido en elementos que no son regulares y, bajo la DAC, podemos reducir el estudio a elementos del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1$ y $\tilde{b}/b \leq 1$ con $b << a$. Asumiremos $(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq (a, b)$.
Para precisar en qué sentido entendemos $b << a$, asumiremos la existencia de $\epsilon < 1$ verificando

$$\begin{cases} b/a \leq \dfrac{1-\epsilon}{2\tan(\pi - \psi_M)} & \text{si } \frac{a-\tilde{a}}{b} \leq \tan(\pi - \psi_M) \\ b/a \leq \dfrac{1-\epsilon}{2\tan(\psi_M - \pi/2)} & \text{si } \frac{a-\tilde{a}}{b} > \tan(\pi - \psi_M). \end{cases} \tag{10}$$

La estimación anisotrópica tiene sentido en elementos que no son regulares y, bajo la DAC, podemos reducir el estudio a elementos del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1$ y $\tilde{b}/b \leq 1$ con $b << a$. Asumiremos $(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq (a, b)$.
Para precisar en qué sentido entendemos $b << a$, asumiremos la existencia de $\epsilon < 1$ verificando

$$\begin{cases} b/a \leq \dfrac{1-\epsilon}{2\tan(\pi - \psi_M)} & \text{si } \frac{a-\tilde{a}}{b} \leq \tan(\pi - \psi_M) \\[2ex] b/a \leq \dfrac{1-\epsilon}{2\tan(\psi_M - \pi/2)} & \text{si } \frac{a-\tilde{a}}{b} > \tan(\pi - \psi_M). \end{cases} \tag{10}$$

Asumiremos también

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \qquad 1 - \epsilon/4 \leq \tilde{b}/b \leq 1. \tag{11}$$

4. Concluyendo resultados.

La estimación anisotrópica tiene sentido en elementos que no son regulares y, bajo la DAC, podemos reducir el estudio a elementos del tipo $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ verificando $1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1$ y $\tilde{b}/b \leq 1$ con $b << a$. Asumiremos $(\tilde{a}, \tilde{b}) \neq (a, b)$.
Para precisar en qué sentido entendemos $b << a$, asumiremos la existencia de $\epsilon < 1$ verificando

$$\begin{cases} b/a \leq \dfrac{1-\epsilon}{2\tan(\pi - \psi_M)} & \text{si } \frac{a-\tilde{a}}{b} \leq \tan(\pi - \psi_M) \\[2ex] b/a \leq \dfrac{1-\epsilon}{2\tan(\psi_M - \pi/2)} & \text{si } \frac{a-\tilde{a}}{b} > \tan(\pi - \psi_M). \end{cases} \tag{10}$$

Asumiremos también

$$1/2 \leq \tilde{a}/a \leq 1, \qquad 1 - \epsilon/4 \leq \tilde{b}/b \leq 1. \tag{11}$$

Lema

Sea $K = K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ un cuadrilátero convexo verificando (10) y (11), entonces K satisface (3) y (4) o, equivalentemente, K es la perturbación de un rectángulo.

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Demostración.

$\Rightarrow$: $\checkmark$

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Demostración.

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Es necesario precisar en qué sentido K es *anisotrópico*: informalmente hablando, lo es si el paralelogramo determinado por l_1 y l_2 cumple *mac* (por lo tanto DAC) y $|l_1| << |l_2|$ en el sentido inducido por (10).

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Demostración.

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Es necesario precisar en qué sentido K es *anisotrópico*: informalmente hablando, lo es si el paralelogramo determinado por l_1 y l_2 cumple *mac* (por lo tanto DAC) y $|l_1| << |l_2|$ en el sentido inducido por (10). Luego,

K anisotrópico cumpliendo DAC

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Demostración.

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Es necesario precisar en qué sentido K es *anisotrópico*: informalmente hablando, lo es si el paralelogramo determinado por l_1 y l_2 cumple *mac* (por lo tanto DAC) y $|l_1| << |l_2|$ en el sentido inducido por (10). Luego,

K anisotrópico cumpliendo $DAC \Rightarrow K \sim K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ cumpliendo (10) y (11)

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Demostración.

$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: Es necesario precisar en qué sentido K es *anisotrópico*: informalmente hablando, lo es si el paralelogramo determinado por l_1 y l_2 cumple *mac* (por lo tanto DAC) y $|l_1| << |l_2|$ en el sentido inducido por (10). Luego,

K anisotrópico cumpliendo $DAC \Rightarrow K \sim K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ cumpliendo (10) y (11) $\Rightarrow K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es la perturbación de un rectángulo

Proposición

Sea K un cuadrilátero anisotrópico. Entonces K es una perturbación de un rectángulo, si y sólo si, K verifica la condición del ángulo doble.

Demostración.

- $\Rightarrow$: ✓
- $\Leftarrow$: Es necesario precisar en qué sentido K es *anisotrópico*: informalmente hablando, lo es si el paralelogramo determinado por l_1 y l_2 cumple *mac* (por lo tanto DAC) y $|l_1| << |l_2|$ en el sentido inducido por (10). Luego,

  K anisotrópico cumpliendo $DAC \Rightarrow K \sim K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ cumpliendo (10) y (11) $\Rightarrow K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ es la perturbación de un rectángulo $\Rightarrow K$ es la perturbación de un rectángulo. $\square$

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo la doble condición del ángulo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \tag{12}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$ donde l_1 y l_2 son dos lados adyacentes de K tal que el paralelogramo generado por l_1 y l_2 contiene enteramente a K.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo la doble condición del ángulo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \tag{12}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$ donde l_1 y l_2 son dos lados adyacentes de K tal que el paralelogramo generado por l_1 y l_2 contiene enteramente a K.

Demostración.

- K cumpliendo $DAC \Leftrightarrow K \sim K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ regular o siendo la perturbación de un rectángulo.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo la doble condición del ángulo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \tag{12}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$ donde l_1 y l_2 son dos lados adyacentes de K tal que el paralelogramo generado por l_1 y l_2 contiene enteramente a K.

Demostración.

- K cumpliendo $DAC \Leftrightarrow K \sim K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ regular o siendo la perturbación de un rectángulo.
- El error sobre K vale si el error sobre $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ vale.

Teorema

Para un cuadrilátero K satisfaciendo la doble condición del ángulo $DAC(\psi_m, \psi_M)$ vale la siguiente estimación anisotrópica del error

$$|u - Qu|_{H^1(K)} \leq C \left[|l_1| \, \|\partial_{l_1} \nabla u\|_{L^2(K)} + |l_2| \, \|\partial_{l_2} \nabla u\|_{L^2(K)} \right] \tag{12}$$

para alguna constante positiva $C := C(\psi_m, \psi_M)$ donde l_1 y l_2 son dos lados adyacentes de K tal que el paralelogramo generado por l_1 y l_2 contiene enteramente a K.

Demostración.

- K cumpliendo $DAC \Leftrightarrow K \sim K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ con $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ regular o siendo la perturbación de un rectángulo.
- El error sobre K vale si el error sobre $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ vale.
- El error sobre $K(a, b, \tilde{a}, \tilde{b})$ vale: si es regular, por resultado de Jamet; si es perturbación de un rectángulo, por resultado de Apel. $\square$

FIN!!