Construcción de multiwavelets de Hermite

Lucila Calderón [1,3] María Teresa Martín [2,3] Victoria Vampa [1]

[1] Departamento de Ciencias Básicas - Facultad de Ingeniería

[2] Facultad de Ciencias Exactas - IFLP

Universidad Nacional de La Plata

[3] CONICET

LXV Reunión anual de comunicaciones científicas
Unión Matemática Argentina

23 de Septiembre de 2016

Motivación

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)$$

$u(0) = u(1) = 0$. p y q funciones continuas sobre $[0,1]$

Formulación débil del problema: Hallar $u \in V = H_0^1(0,1)$ tal que

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

Donde

$$a(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\ dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\ dx, \ con\ u, v \in V.$$

Método de Galerkin

Encontrar $u_n \in V_n \subset V$ tal que

$$a(u_n, v) = \langle f, v \rangle\,, \quad \forall\ v \in V_n$$

Sea$\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ base de V_n,

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ \phi_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ a(\phi_j, \phi_i) = \langle f, \phi_i \rangle \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

$$\boxed{K\ \alpha = R}$$

Resolución del sistema $K \ \alpha = R$

Propiedades que interesan:

- Bajo costo computacional.
- K: matriz esparcida.
- K: número de condición pequeño.
- $u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ \phi_j$ buena aproximación de u.

$\boxed{\text{Qué subespacios } V_n \text{ convienen?}} \longrightarrow \boxed{\text{Análisis multirresolución}}$

Análisis de multirresolución sobre $L^2(\mathbb{R})$

$$\ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \qquad V_j \subset L^2(\mathbb{R}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

1. $\bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R}).$
2. $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$
3. $\phi(x) \in V_0$ función de escala, sus traslaciones son una base de V_0.

- $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow V_j = \overline{span}\{\phi_{j,k} k \in \mathbb{Z}\}$
- *Espacios wavelets* W_j: complemento ortogonal de V_j en V_{j+1},

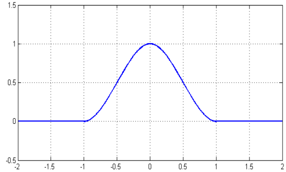
$$\boxed{V_{j+1} = V_j \oplus W_j}$$

- Existe ψ: *wavelet*

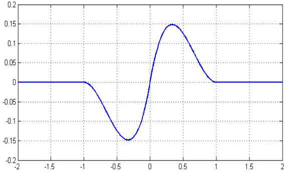
$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow W_j = \overline{span}\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Splines cúbicos de Hermite

$$\phi_1(x) := \begin{cases} (x+1)^2(1-2x) & x \in [-1,0] \\ (1-x)^2(2x+1) & x \in [0,1] \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$



$$\phi_2(x) := \begin{cases} x(x+1)^2 & x \in [-1,0] \\ x(1-x)^2 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$



$$\phi_1(0) = 1, \quad \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_2(0) = 0, \quad \phi_2'(0) = 1$$

V_0 es el espacio generado por las traslaciones de ϕ_1 y ϕ_2.

Hacia la construcción de wavelets

Consideremos

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

Se desea encontrar una wavelet tal que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1'(x), \phi_1'(x-k) \rangle &= \langle \psi_2'(x), \phi_1'(x-k) \rangle = 0, \\
\langle \psi_1'(x), \phi_2'(x-k) \rangle &= \langle \psi_2'(x), \phi_2'(x-k) \rangle = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Supongamos que

$$\Psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[b_1(k)\phi_1(2x-k) + b_2(k)\phi_2(2x-k) \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fijado $l \in \mathbb{Z}$ se tiene,

$$\begin{aligned}\left\langle \psi'(x), \phi_1'(x-l) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[b_1(k)\phi_1'(2x-k) + b_2(k)\phi_2'(2x-k) \right], \phi_1'(x-l) \right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_1(k) \left\langle \phi_1'(2x-k), \phi_1'(x-l) \right\rangle + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_2(k) \left\langle \phi_2'(2x-k), \phi_1'(x-l) \right\rangle .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \psi'(x), \phi_2'(x-l) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[b_1(k)\phi_1'(2x-k) + b_2(k)\phi_2'(2x-k) \right], \phi_2'(x-l) \right\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_1(k) \left\langle \phi_1'(2x-k), \phi_2'(x-l) \right\rangle + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_2(k) \left\langle \phi_2'(2x-k), \phi_2'(x-l) \right\rangle .\end{aligned}$$

$l \in \mathbb{Z}$

$$\langle \psi'(x), \phi_1'(x-l) \rangle = \frac{1}{20} [-21\ b_1(2l-2) + 42\ b_1(2l) - 21\ b_1(2l+2) \\ -3\ b_2(2l-2) + 4\ b_2(2l-1) - 4\ b_2(2l+1) + 3\ b_2(2l+2)]$$

$$\langle \psi'(x), \phi_2'(x-l) \rangle = \frac{1}{120} [33\ b_1(2l-2) - 60\ b_1(2l-1) + 60\ b_1(2l+1) - 33\ b_1(2l+2) \\ +4\ b_2(2l-2) - 12\ b_2(2l-1) + 28\ b_2(2l) - 12\ b_2(2l+1) + 4\ b_2(2l+2)].$$

Ahora debemos hallar las sucesiones b_1 y b_2.

Llamamos

$$q_{11}(z) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_1(2l+1)z^{2l+1}, \qquad q_{12}(z) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_1(2l)z^{2l}$$

$$q_{21}(z) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_2(2l+1)z^{2l+1}, \qquad q_{22}(z) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_2(2l)z^{2l}.$$

$$B(z)(q_{11}(z), q_{12}(z), q_{21}(z), q_{22}(z))^T = 0$$

donde

$$B(z) = \begin{bmatrix} 0 & -21z^2+42-21z^{-2} & 4(z-z^{-1}) & -3(z^2-z^{-2}) \\ -60(z-z^{-1}) & 33(z^2-z^{-2}) & -12(z+z^{-1}) & 4z^2+28+4z^{-2} \end{bmatrix}$$

Se tienen dos soluciones independientes:

$$\begin{bmatrix} q_{11}(z) \\ q_{12}(z) \\ q_{21}(z) \\ q_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(z+z^{-1}) \\ 4 \\ 21(z-z^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} q_{11}(z) \\ q_{12}(z) \\ q_{21}(z) \\ q_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}-z \\ 0 \\ 9(z+z^{-1}) \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1(x) = -2\phi_1(2x+1) + 4\phi_1(2x) - 2\phi_1(2x-1) - 21\phi_2(2x+1) + 21\phi_2(2x-1)$$

$$\psi_2(x) = \phi_1(2x+1) - \phi_1(2x-1) + 9\phi_2(2x+1) + 12\phi_2(2x) + 9\phi_2(2x-1)$$

- ψ_1 y ψ_2 tiene soporte en $[-1, 1]$.
- Las traslaciones de ellas generan el espacio W_0.
- Son ortogonales respecto al producto interno de las derivadas, $\langle u', v' \rangle$.
- ψ_1 es simétrica y ψ_2 es antisimétrica.

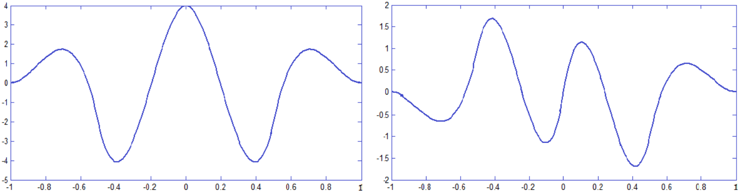


Figura: Wavelets ψ_1 y ψ_2.

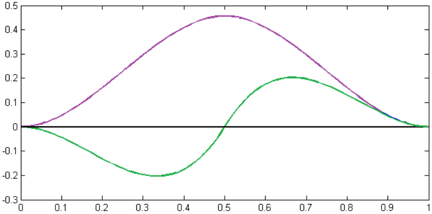
Base de wavelets

$$\{\phi_1(2^j x - k) : k = 1, ..., 2^j - 1\} \cup \{\phi_2(2^j x - k)|_{(0,1)} : k = 0, ..., 2^j\}$$

base de V_j

$$\{\psi_1(2^j x - k) : k = 1, ..., 2^j - 1\} \cup \{\psi_2(2^j x - k)|_{(0,1)} : k = 0, ..., 2^j\}$$

base de W_j



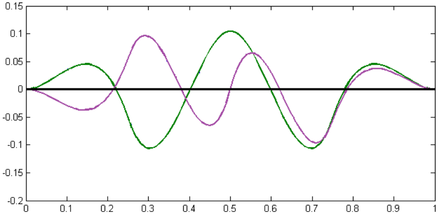


Figura: Funciones base del espacio V_1 y W_1.

Base de wavelets

$$\{\phi_1(2^jx-k):k=1,...,2^j-1\}\cup\{\phi_2(2^jx-k)|_{(0,1)}:k=0,...,2^j\}$$

base de V_j

$$\{\psi_1(2^jx-k):k=1,...,2^j-1\}\cup\{\psi_2(2^jx-k)|_{(0,1)}:k=0,...,2^j\}$$

base de W_j

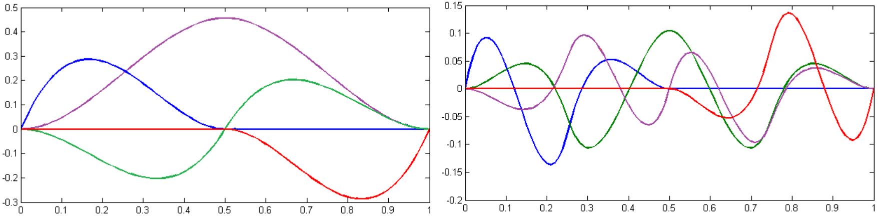


Figura: Funciones base del espacio V_1 y W_1.

Aplicaciones

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases}$$

donde $f(x) = (53{,}7\ \pi)^2 \sin(53{,}7\ \pi x) + (2{,}3\ \pi)^2 \sin(2{,}3\ \pi x)$, $x \in (0,1)$.

$V_{j+1} := V_1 + W_1 + W_2 + ... + W_j$, cuya base $\{g_1, g_2 ..., g_{2^{j+1}}\}$

Sea $u_j = \sum_{i=1}^{2^{j+1}} \alpha_i g_i$, la aproximación de Galerkin queda discretizada como

$$\sum_{i=1}^{2^{j+1}} \langle g_l', g_i' \rangle \alpha_i = \langle g_l, f \rangle, \qquad l = 1, ..., 2^{j+1}$$

La matriz de rigidez $K_j = (\langle g_l', g_i' \rangle)_{1 \le l, i \le 2^{j+1}}$ es diagonal por bloques.

Por otra parte cada bloque es una matriz banda.

Resultados númericos

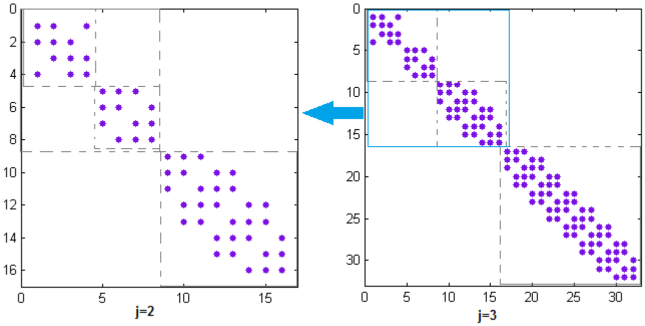


Figura: Forma de la matriz K_j

Condicionamiento

El número de condición $k = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ de la matriz K_j está uniformemente acotado.

j	6	7	8	9	10	11	12
λ_{max}	1,5780	1,5787	1,5789	1,5789	1,5789	1,5789	1,5789
λ_{min}	0,4220	0,4213	1,5789	0,4211	0,4211	0,4211	0,4211
k	3,7397	3,7474	3,7494	3,7498	3,7498	3,7498	3,7498

Cuadro: Número de condición de la matriz K_j

La solución exacta del problema es

$$u(x) = \sin(53{,}7\pi x) + \sin(2{,}3\pi x), \qquad x \in (0,1).$$

El error relativo está dado por $e_j = \dfrac{\|u_j - u\|}{\|u\|}$

j	e_j
6	1.210×10^{-2}
7	1.326×10^{-3}
8	1.082×10^{-4}
9	7.358×10^{-6}
10	4.705×10^{-7}
11	2.958×10^{-8}
12	1.852×10^{-9}

Solución exacta

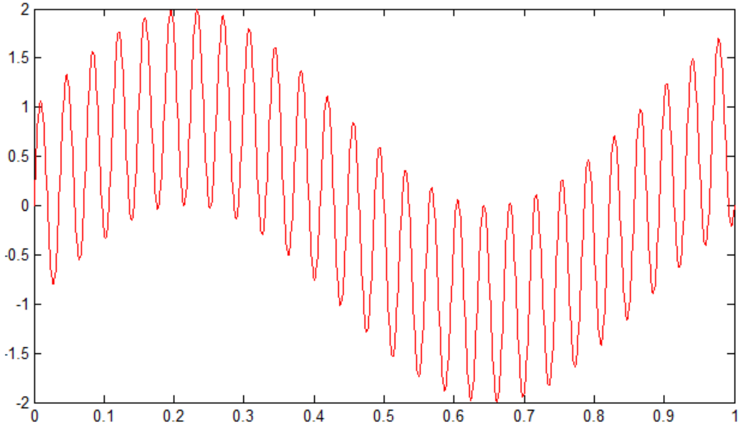
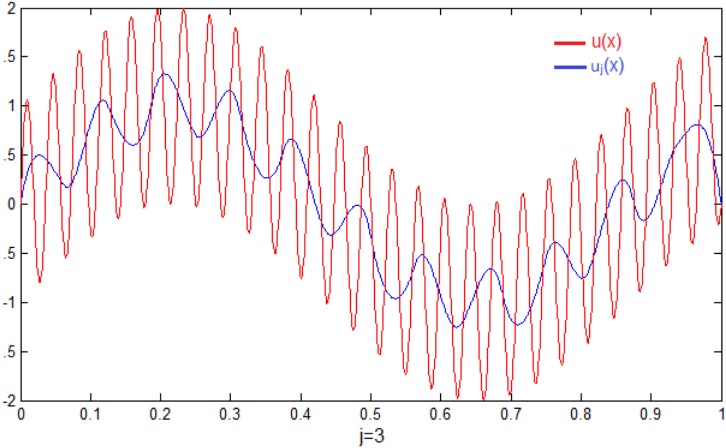
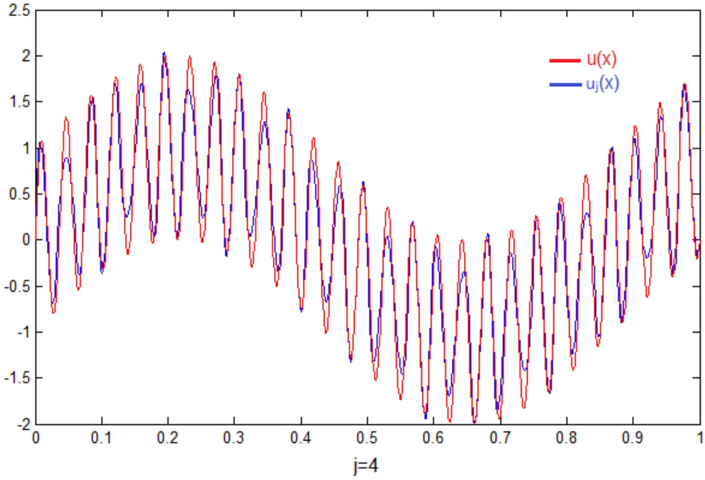
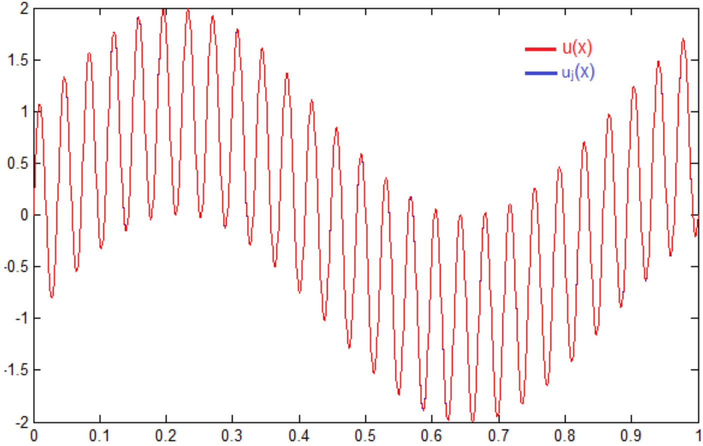


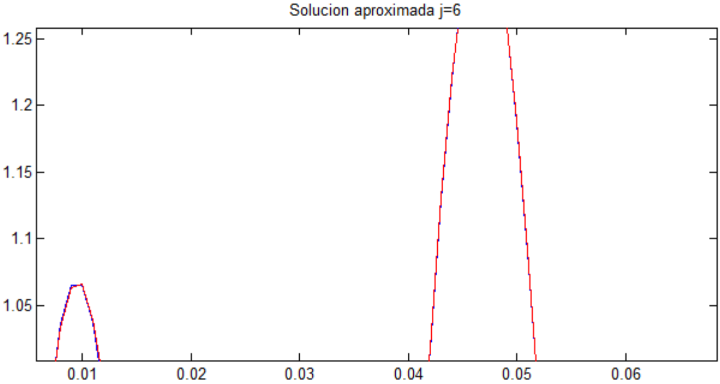
Figura: $u(x) = \sin(53{,}7\pi x) + \sin(2{,}3\pi x)$

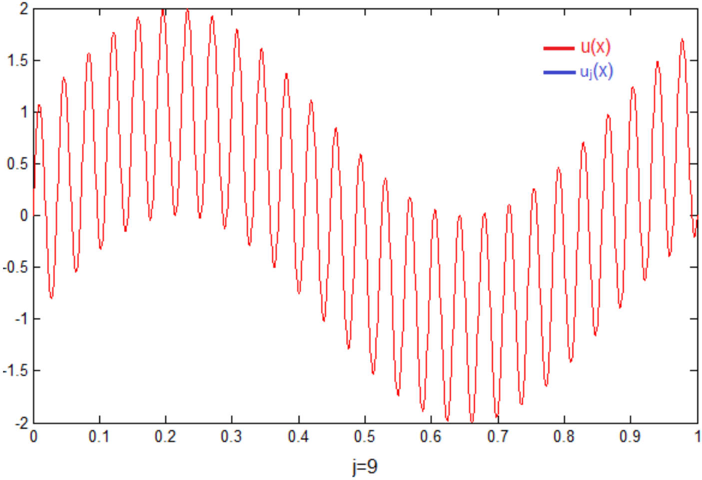

u(x)
uj(x)
2
.5
1
.5
0
.5
-1
.5
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
j=3


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
u(x)
$u_j(x)$
j=4



j=6


Solucion aproximada j=6
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06


u(x)
$u_j(x)$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
j=9

Conclusiones

- Se constuyeron wavelets ortogonales respecto al producto interno $\langle u', v' \rangle$.
- La matriz K_j es una matriz diagonal por bloques.
- Posee número de condición acotado.
- u_j una buena aproximación de u.

Trabajo Actual

Construir wavelets que satisfagan el requerimiento de ortogonalidad dado por:

$$a\langle\psi_1, \phi_m(x-k)\rangle = a\langle\psi_2, \phi_m(x-k)\rangle = 0, \qquad m = 1, 2, \forall k \in \mathbb{Z},$$

donde a es la forma bilineal dada por

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 u\ v\ dx$$

Bibliografía

R.Q Jia and S.T Liu, *Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval*, Advance in Computational Mathematics 25 (2006), pp 23-39.

C.K. Chui and J.Z. Wang, *On compasupported wavelets and a duality principle*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1992), pp 903-916.

G. Plonka and V. Strela, *From Wavelets to Multiwavelets*, Vanderbilt University Press Nashville TN, Mathematical Methods for Curves and Surfaces II 25 (1998), pp 1-25.