Implementación simple del MEF aplicado al problema del laplaciano fraccionario con condición de Dirichlet homogénea en 2D

G. Acosta , F. M. Bersetche, J.P. Borthagaray

September 20, 2016

Problema Modelo

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c. \end{cases} \tag{1}$$

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) \text{ p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}, \tag{2}$$

$C(n,s) = \frac{2^{2s} s \Gamma(s+\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}\Gamma(1-s)}$ constante de normalización.

Formulación Débil

- $H^s(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : |v|_{H^s(\Omega)} < \infty\}$,
  $|v|_{H^s(\Omega)} := \int\int_{\Omega^2} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$
- $\tilde{H}^s(\Omega) := \{v \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp} v \subset \bar{\Omega}\}$

Sea la forma bilineal:

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$$

Hallar $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$ tal que:

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in \tilde{H}^s(\Omega)$$

- G. Acosta y J.P. Borthagaray (2015)

Elementos Finitos

- $\mathcal{T}$ triangulación de Ω, (Ω una bola centrada).
- $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ bases nodales (lineales a trozos)
- $\mathbb{V}_h := < \varphi_1, ..., \varphi_N >$

Hallar $u_h \in \mathbb{V}_h$ tal que:

$$\langle u_h, v_h \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega f v_h, \quad \forall v \in \mathbb{V}_h$$

Elementos Finitos

- $K_{i,j} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}$
- $U \in \mathbb{R}^N$ con $u_h = \sum_j U_j \varphi_j$
- $F \in \mathbb{R}^N$ con $F_j = \int_\Omega f \varphi_j$
- Buscamos resolver:

$$KU = F$$

Matriz de Rigidez

$$K_{i,j} = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x - y|^{2+2s}} dxdy$$

Matriz de Rigidez

$$K_{i,j} = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x - y|^{2+2s}} dxdy$$

- $T_\ell,\ T_m \in \mathcal{T},\ N_{\mathcal{T}} = \#\mathcal{T}$
- $I^{i,j}_{\ell,m} = \int_{T_\ell}\int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x)-\varphi_i(y))(\varphi_j(x)-\varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$
- $J^{i,j}_{\ell} = \int_{T_\ell}\int_{\Omega^c} \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)}{|x-y|^{2+2s}} dydx$

Matriz de Rigidez

$$K_{i,j} = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$$

- $T_\ell,\ T_m \in \mathcal{T},\ N_{\mathcal{T}} = \#\mathcal{T}$
- $I^{i,j}_{\ell,m} = \int_{T_\ell} \int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x)-\varphi_i(y))(\varphi_j(x)-\varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$
- $J^{i,j}_{\ell} = \int_{T_\ell} \int_{\Omega^c} \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)}{|x-y|^{2+2s}} dydx$

$$K_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{N_{\mathcal{T}}} \left(\sum_{m=1}^{N_{\mathcal{T}}} I^{i,j}_{\ell,m} + 2J^{i,j}_{\ell} \right)$$

Ensamblado de Matriz de Rigidez

$$I_{\ell,m}^{i,j} = \int_{T_\ell}\int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$$

$$J_{\ell}^{i,j} = \int_{T_\ell}\int_{\Omega^c} \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)}{|x-y|^{2+2s}} dydx$$

Problemas para el cómputo de $I_{\ell,m}^{i,j}$

$$I_{\ell,m}^{i,j} = \int_{T_\ell} \int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$$

Dividimos en 4 casos:

- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m = \emptyset$
- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m =$ un vértice
- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m =$ un lado
- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m =$ un triángulo

Problemas para el cómputo de $I_{\ell,m}^{i,j}$

$$I_{\ell,m}^{i,j} = \int_{T_\ell}\int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))(\varphi_j(x) - \varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$$

Dividimos en 4 casos:

- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m = \emptyset$ Sin problemas

En los demás hay que tratar singularidades

- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m =$ un vértice
- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m =$ un lado
- $\bar{T}_\ell \cap \bar{T}_m =$ un triángulo

Problemas para el cómputo de $I_{\ell,m}^{i,j}$

$$I_{\ell,m}^{i,j} = \int_{T_\ell}\int_{T_m} \frac{(\varphi_i(x)-\varphi_i(y))(\varphi_j(x)-\varphi_j(y))}{|x-y|^{2+2s}} dxdy$$

Usamos tranformada de Duffy

$$\hat{T}_\ell \times \hat{T}_m \longrightarrow [0,1]^4$$

Singuaridades se integran de forma exacta

Problemas para el cómputo de $J_\ell^{i,j}$

$$J_\ell^{i,j} = \int_{T_\ell} \int_{\Omega^c} \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)}{|x-y|^{2+2s}} dydx$$

Problemas para el cómputo de $J_\ell^{i,j}$

$$J_\ell^{i,j} = \int_{T_\ell} \int_{\Omega^c} \frac{\varphi_i(x)\varphi_j(x)}{|x-y|^{2+2s}} dydx =$$

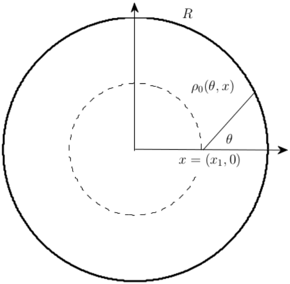
$$= \int_{T_\ell} \varphi_i(x)\varphi_j(x) \int_{\Omega^c} \frac{1}{|x-y|^{2+2s}} dy dx =$$

$$= \int_{T_\ell} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\psi(x) dx$$

Problemas para el cómputo de $J_\ell^{i,j}$

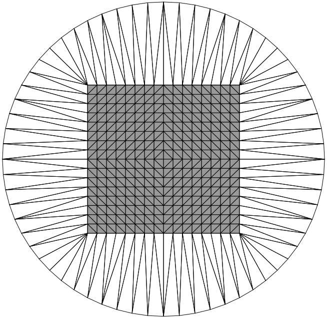
$$\psi(x) = \int_{\Omega^c} \frac{1}{|x-y|^{2+2s}} dy = \frac{1}{2s} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho_0(\theta, x')} dx'$$

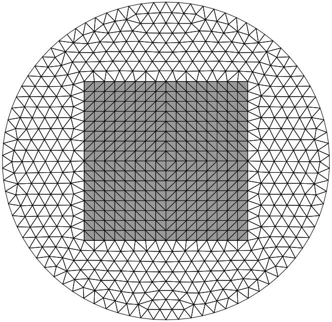
- Ω bola centrada (radio R) $\Rightarrow \psi(x)$ es radial
- Basta conocer sus valores en $x = (x_1, 0)$



¿Y si Ω no es una bola?

- Construimos un dominio auxiliar
- Dominio auxiliar con nodos Dirichlet





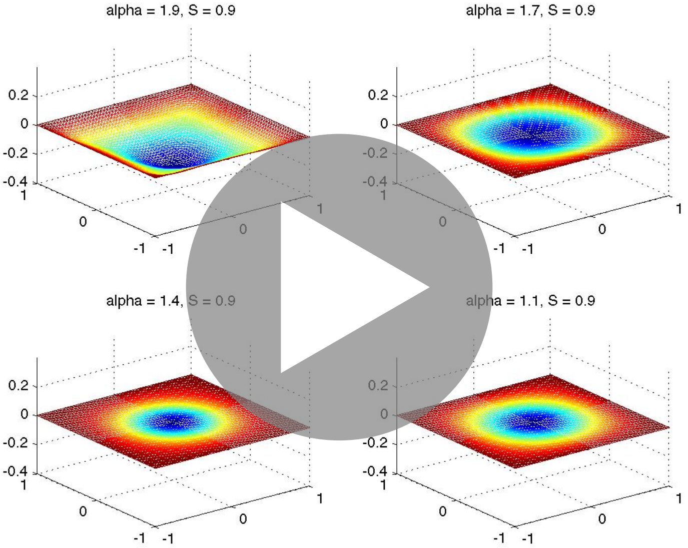
Código

- MATLAB
- Unas 100 lineas el principal (unas 150 sumando funciones)
- Intentamos balance entre simplicidad y eficiencia

Difusión fraccionaria

$$\begin{cases} u_t = (-\Delta)^s u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c. \end{cases} \tag{3}$$

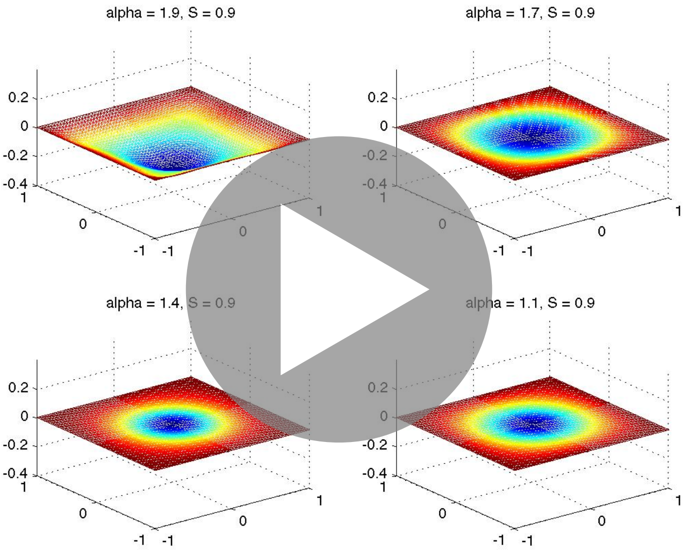
Difusión fraccionaria



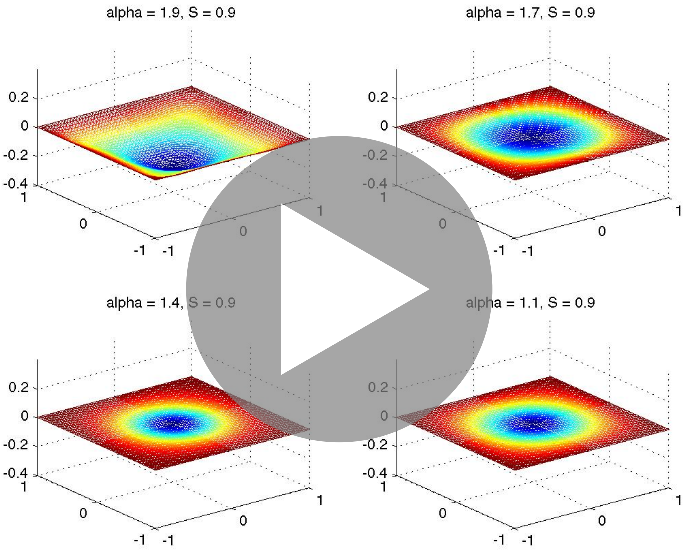
Difusión fraccionaria en espacio y tiempo

$$\begin{cases} D_0^\alpha u = (-\Delta)^s u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \Omega^c. \end{cases} \tag{4}$$

Difusión fraccionaria en espacio y tiempo



Difusión fraccionaria en espacio y tiempo ($\alpha \in [1,2]$)



Difusión fraccionaria en espacio y tiempo ($\alpha \in [1, 2]$)