Ecuaciones de Euler-Lagrange Fraccionarias Utilizando solo Derivadas de Caputo

Melani Barrios [§][¶], Gabriela Reyero [§]

LXV Reunión anual de comunicaciones científicas
Unión Matemática Argentina
Bahía Blanca

[§] Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
[¶] CONICET, Rosario

PROBLEMAS VARIACIONALES

Hallar $y \in E$, tal que minimice o maximice el funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x,y,y')\,dx$$

donde L es un Langrangiano y

$$E = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : y, y' \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno

$$y(a) = y_a \; y(b) = y_b$$

Ecuación de Euler-Lagrange $\longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

Problemas Variacionales Isoperimétricos

Hallar $y \in E$, tal que minimice o maximice el funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x,y,y')\,dx$$

donde L es un Langrangiano y

$$E = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : y, y' \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno

$$y(a) = y_a \; y(b) = y_b$$

Y una restricción integral

$$I(y) = \int_a^b G(x,y,y')\,dx = c$$

Ecuación de Euler-Lagrange $\longrightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$

donde $F = L - \lambda G$.

Integración y Derivación Fraccionaria

¿Se puede hallar la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de cierta función?
¿Y la integral $\Pi-$ésima?

- **Origen:** (1695) Leibnitz introduce la noción de la derivada de orden n de una función $\frac{d^n y}{dx^n}$ y en una correspondencia con L'Hopital plantean la cuestión del posible significado de la derivada de orden n si $n = 1/2$. (Siglo XIX) Lacroix, Euler, Fourier, Laplace, Liouville, Riemman, Lagrange, Abel, entre otros, amplían el concepto de derivación e integración fraccionaria para órdenes no enteros.
- **Propósito:** siendo una extensión del cálculo tradicional, se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos. Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria es un operador no local, esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en buenas candidatas para la modelización de fenómenos con memoria.
- **Aplicaciones:** modelos de transferencia del calor que admiten historial, viscoelasticidad, circuitos eléctricos, química electrónica, economía, biología, etc.

Definición: Los operadores integrales fraccionarios de Riemann-Liouville de orden α a izquierda y a derecha, están definidos por:

$$ {}_aI_x^{\alpha}[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi $$

y

$$ {}_xI_b^{\alpha}[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi $$

respectivamente.

Definición: Los operadores diferenciales fraccionarios de Riemann-Liouville de orden α a izquierda y a derecha, están definidos por:

$$
{}_aD_x^{\alpha} := \frac{d^n}{dx^n} \circ {}_aI_x^{n-\alpha}
$$

y

$$
{}_xD_b^{\alpha} := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \circ {}_xI_b^{n-\alpha}
$$

respectivamente donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

Definición: Los operadores diferenciales fraccionarios de Riemann-Liouville de orden α a izquierda y a derecha, están definidos por:

$$ {}_aD_x^{\alpha} := \frac{d^n}{dx^n} \circ {}_aI_x^{n-\alpha} $$

y

$$ {}_xD_b^{\alpha} := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \circ {}_xI_b^{n-\alpha} $$

respectivamente donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

Definición: Los operadores diferenciales fraccionarios de Caputo de orden α a izquierda y a derecha, están definidos por:

$$ {}_a^CD_x^{\alpha} := {}_aI_x^{n-\alpha} \circ \frac{d^n}{dx^n} $$

y

$$ {}_x^CD_b^{\alpha} := {}_xI_b^{n-\alpha} \circ (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} $$

respectivamente donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

Algunas Propiedades

Una diferencia importante entre las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo es que, siendo K una constante arbitraria resulta:

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}K = 0 \qquad {}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}K = 0 $$

mientras que,

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{x}K = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \qquad {}_{x}D^{\alpha}_{b}K = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha} $$

$$ {}_{a}D^{\alpha}_{x}(x-a)^{\alpha-1} = 0 \qquad {}_{x}D^{\alpha}_{b}(b-x)^{\alpha-1} = 0 $$

Integración por Partes Fraccionaria

Sea $0 < \alpha < 1$, y $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^1[a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b g(x)\, {}_a^C D_x^{\alpha} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, {}_x D_b^{\alpha} g(x)\, dx + \left[{}_x I_b^{1-\alpha} g(x) f(x) \right] \Big|_a^b$$

y

$$\int_a^b g(x)\, {}_x^C D_b^{\alpha} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, {}_a D_x^{\alpha} g(x)\, dx - \left[{}_a I_x^{1-\alpha} g(x) f(x) \right] \Big|_a^b$$

Además, si $f(a) = f(b) = 0$, se tiene

$$\int_a^b g(x)\, {}_a^C D_x^{\alpha} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, {}_x D_b^{\alpha} g(x)\, dx$$

y

$$\int_a^b g(x)\, {}_x^C D_b^{\alpha} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, {}_a D_x^{\alpha} g(x)\, dx.$$

PROBLEMAS VARIACIONALES FRACCIONARIOS

Hallar $y \in {}_{a}^{\alpha}E$, tal que minimice o maximice el funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} y)\, dx$$

donde L es un Langrangiano y

$${}_{a}^{\alpha}E = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} y \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno: $y(a) = y_a \; y(b) = y_b$

- Agrawal O.P.,2002

  Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria $\longrightarrow \dfrac{\partial L}{\partial y} + {}_{x}D_{b}^{\alpha} \dfrac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} y} = 0$
- Lazo M.,Torres D.,2013
  Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria utilizando sólo Derivadas de Caputo $\longrightarrow \dfrac{\partial L}{\partial y} + {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha} \dfrac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha} y} = 0$

Problemas Isoperimétricos Fraccionarios

Hallar $y \in {}_a^\alpha E$, tal que minimice o maximice el funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, {}_a^C D_x^\alpha y)\, dx$$

donde L es un Langrangiano y

$${}_a^\alpha E = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : {}_a^C D_x^\alpha y \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno: $y(a) = y_a \; y(b) = y_b$
Y con una restricción integral: $I(y) = \int_a^b G(x, y, {}_a^C D_x^\alpha y)\, dx = c$

- Agrawal O.P.,2002

  Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria $\longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y} + {}_x D_b^\alpha \dfrac{\partial F}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0$

- Lazo M.,Torres D.,2013
  Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria utilizando sólo Derivadas de Caputo $\longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y} + {}_x^C D_b^\alpha \dfrac{\partial F}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0$
  donde $F = L - \lambda G$.

Problemas Variacionales Fraccionarios con Derivadas Clásicas y de Caputo

Hallar $y \in {}_a^\alpha E'$, tal que minimice o maximice el funcional:

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha y)\, dx$$

donde L es un Langrangiano suficientemente bueno y

$${}_a^\alpha E' = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : y \in C^1([a,b]),\ {}_a^C D_x^\alpha y \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno: $y(a) = y_a \ y(b) = y_b$

Teorema

(Odzijewicz T., Malinowska A.,2011) Si y es máximo o mínimo de J en ${}_a^\alpha E'$ sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_a \ y(b) = y_b$, entonces y satisface la ecuación diferencial fraccionaria de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0$$

Problemas Isoperimétricos Fraccionarios con Derivadas Clásicas y de Caputo

Hallar $y \in {}_a^{\alpha}E'$, tal que minimice o maximice el funcional:

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^{\alpha} y)\, dx$$

donde L es un Langrangiano suficientemente bueno y

$${}_a^{\alpha}E' = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : y \in C^1([a,b]),\ {}_a^C D_x^{\alpha} y \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno: $y(a) = y_a$ $y(b) = y_b$
y una restricción integral: $I(y) = \int_a^b G(x, y, y', {}_a^C D_x^{\alpha} y)\, dx = c$

- Odzijewicz T., Malinowska A.,2011
  Ec. de Euler-Lagrange Fraccionaria $\to \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + {}_x D_b^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial\, {}_a^C D_x^{\alpha} y} = 0$
  con $F = L - \lambda G$.

Problemas Isoperimétricos Fraccionarios con Derivadas Clásicas y de Caputo

Hallar $y \in {}_a^\alpha E'$, tal que minimice o maximice el funcional:

$$J(y) = \int_a^b L(x,y,y',{}_a^C D_x^\alpha y)\,dx$$

donde L es un Langrangiano suficientemente bueno y

$${}_a^\alpha E' = \{y:[a,b]\to\mathbb{R} : y\in C^1([a,b]),\ {}_a^C D_x^\alpha y \in C([a,b])\}$$

con las condiciones de contorno: $y(a) = y_a \ y(b) = y_b$
y una restricción integral: $I(y) = \int_a^b G(x,y,y',{}_a^C D_x^\alpha y)\,dx = c$

- Odzijewicz T., Malinowska A.,2011
  Ec. de Euler-Lagrange Fraccionaria $\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + {}_x D_b^\alpha \frac{\partial F}{\partial {}_a^C D_x^\alpha y} = 0$
  con $F = L - \lambda G$.

Ecuaciones de Euler-Lagrange Fraccionarias en Forma Integral

Lema

(Lazo M.,Torres D.,2013) Sea g una función derivable en $[a,b]$ con $g(a)=g(b)=0$, y sea $f\in L_1([a,b])$ tal que existe un número $\varepsilon\in(a,b]$ con $|f(x)|\leq c(x-a)^{\beta}$ para todo $x\in[a,\varepsilon]$ donde $c>0$ y $\beta>-\alpha$ son constantes. Entonces

$$ {}_aI_b^{\alpha}\left(f(x)\,{}_a^CD_x^{\alpha}g(x)\right)=0\Longrightarrow f\equiv K$$

donde K es una constante.

Observación: Siendo la definición de integral fraccionaria de Riemman-Liouville

$$ {}_aI_x^{\alpha}[f](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-\xi)^{\alpha-1}f(\xi)\,d\xi$$

Notemos que podemos escribir al funcional J como

$$J(y)=\int_a^b L\left(x,y,y',{}_a^CD_x^{\alpha}y\right)dx=\Gamma(\alpha)\,{}_aI_b^{\alpha}\left[(b-x)^{1-\alpha}L\left(x,y,y',{}_a^CD_x^{\alpha}y\right)\right]$$

Teorema

Sea J un funcional de la forma

$$J(y)=\int_a^b L\left(x,y,y',{}_a^C D_x^\alpha y\right)dx=\Gamma(\alpha)\,{}_aI_b^\alpha\left[(b-x)^{1-\alpha}L\left(x,y,y',{}_a^C D_x^\alpha y\right)\right]$$

definida en la clase de funciones $y\in{}_a^\alpha E'$, y donde $L\in C^1([a,b)\times\mathbb{R}^3)$ es derivable con respecto a todos sus argumentos. Si y es extremo de J entonces satisface la siguiente ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria en forma integral:

$$_xI_b^\alpha\frac{\partial L}{\partial y}-{}_xI_b^\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)+\frac{\partial L}{\partial\,{}_a^C D_x^\alpha y}=\frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}}$$

para todo $x\in[a,b)$, donde K es una constante.

DEMOSTRACIÓN

Sea y^* un extremo de J dado.
Definimos la familia de funciones $y(x) = y^*(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (1)$,
donde ε es constante, y $\eta \in C^1([a,b])$ es una función arbitraria que satisface las condiciones $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} (1), \eta(a) = \eta(b) = 0 & \Longrightarrow & y \text{ es admisible :} \\ y^*(a) = y_a, y^*(b) = y_b & & y \in C^1([a,b]), y(a) = y_a, y(b) = y_b \end{array}$$

Notaremos $L[y] = L(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha y)$.

y^* es un extremo del funcional $J \Longrightarrow \delta J[y^*] = 0$

$$\begin{aligned} \delta J[y^*] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{1}{\varepsilon} \left(\int_a^b L[y]dx - \int_a^b L[y^*]dx \right) \\ &= \int_a^b \left(\eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} + \eta'(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} + {}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial \left({}_a^C D_x^\alpha y^* \right)} \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Llamemos
$A = \int_a^b \left(\eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx,\ B = \int_a^b \left(\eta'(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx, \quad C = \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial ({}_a^C D_x^\alpha y^*)} \right) dx$

Utilizando el hecho de que ${}_x D_b^\alpha \, {}_x I_b^\alpha \equiv I$, las condiciones de homogeneidad sobre η e integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \left(\eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\eta(x) \, {}_x D_b^\alpha \, {}_x I_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx \\ &= \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \, {}_x I_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} B &= \int_a^b \left(\eta'(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \\ &= \eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \Big|_a^b - \int_a^b \left(\eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \\ &= -\int_a^b \left(\eta(x) \, {}_x D_b^\alpha \, {}_x I_b^\alpha \frac{d}{dx} \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \\ &= -\int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \, {}_x I_b^\alpha \frac{d}{dx} \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \end{aligned}$$

Llamemos
$A = \int_a^b \left(\eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx$, $B = \int_a^b \left(\eta'(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx$, $C = \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial ({}_a^C D_x^\alpha y^*)} \right) dx$

Utilizando el hecho de que ${}_x D_b^\alpha \, {}_x I_b^\alpha \equiv I$, las condiciones de homogeneidad sobre η e integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \left(\eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\eta(x) \, {}_x D_b^\alpha \, {}_x I_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx \\ &= \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \, {}_x I_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right) dx \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} B &= \int_a^b \left(\eta'(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \\ &= \eta(x) \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \Big|_a^b - \int_a^b \left(\eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \\ &= -\int_a^b \left(\eta(x) \, {}_x D_b^\alpha \, {}_x I_b^\alpha \frac{d}{dx} \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \\ &= -\int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha \eta(x) \, {}_x I_b^\alpha \frac{d}{dx} \frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*} \right) dx \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$A+B+C=\int_a^b {}_a^C D_x^\alpha \eta(x)\left[{}_xI_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}-{}_xI_b^\alpha \frac{d}{dx}\frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*}+\frac{\partial L[y^*]}{\partial\left({}_a^C D_x^\alpha y^*\right)}\right]dx$$

Y podemos escribirlo como

$$\Gamma(\alpha)\,{}_aI_b^\alpha\left[{}_a^C D_x^\alpha \eta(x)\underbrace{\left({}_xI_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}-{}_xI_b^\alpha \frac{d}{dx}\frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*}+\frac{\partial L[y^*]}{\partial\left({}_a^C D_x^\alpha y^*\right)}\right)(b-x)^{1-\alpha}}_{f(x)}\right]=0$$

Como $L\in C^1([a,b)\times\mathbb{R}^3)$ tenemos que f es acotado en un entorno suficientemente pequeño de a y tomando $\beta=0>-\alpha$, se verifican las hipótesis del lema anterior y obtenemos que existe K constante tal que

$$\left({}_xI_b^\alpha \frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}-{}_xI_b^\alpha \frac{d}{dx}\frac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*}+\frac{\partial L[y^*]}{\partial\left({}_a^C D_x^\alpha y^*\right)}\right)(b-x)^{1-\alpha}=K$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange utilizando sólo Derivadas de Caputo

Teorema

Si y es máximo o mínimo de J en ${}_a^\alpha E'$ con $L \in C^2\left([a,b] \times \mathbb{R}^3\right)$ sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_a$ $y(b) = y_b$, entonces y satisface la ecuación diferencial fraccionaria de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^C D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0$$

.

Demostración

Considerando la ecuación de Euler-Lagrange obtenida en el teorema anterior, aplicamos de ambos lados de la igualdad la derivada de Caputo por derecha, obtenemos

$$ {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\left({}_{x}I_{b}^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial y} - {}_{x}I_{b}^{\alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \frac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}y}\right) = {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\left(\frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}}\right) $$

Tomando límite cuando $x \to b$, observemos que el lado izquierdo converge pues $L \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^3)$ e $y \in C^1([a,b])$. Por otro lado, el lado derecho diverge cuando $x \to b$ y $K \neq 0$.

Con esto concluímos que entonces deberá ser $K = 0$.

Por último, utilizando que ${}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\, {}_{x}I_{b}^{\alpha} \equiv I$ obtenemos

$$ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}y} = 0 $$

.

Observación: Teoremas análogos se pueden realizar para problemas isoperimétricos fraccionarios.

Generalización

Sea J un funcional de la forma

$$J[y] = \int_a^b L\left(x, y, y', y'', \dots, y^n, {}_a^C D_x^\alpha y\right) dx$$

donde L es un Langrangiano suficientemente bueno y

$${}_a^\alpha E^n = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} : y \in C^n([a,b]),\ {}_a^C D_x^\alpha y \in C([a,b])\}$$

Teorema

Si y es máximo o mínimo de J en ${}_a^\alpha E^n$ con $L \in C^2\left([a,b] \times \mathbb{R}^3\right)$ sujeto a las condiciones de contorno
$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b,\ y'(a) = y'_a,\ y'(b) = y'_b, \dots\ y^{n-1}(a) = y_a^{n-1},\ y^{n-1}(b) = y_b^{n-1},$
entonces y satisface la ecuación diferencial fraccionaria de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \dots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{n-1}}\right) + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial L}{\partial y^n}\right) + {}_x^C D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0$$

EJEMPLO

$J(y) = \int_0^1 \left[y(x)y'(x) + \left({}_0^C D_x^\alpha [y] \right)^2 (x) \right] dx$

$I(y) = \int_0^1 [y(x)]\, dx = 1$

$y(0) = 0 \qquad y(1) = 0$

Luego, $F = y(x)y'(x) + \left({}_0^C D_x^\alpha [y] \right)^2 (x) - \lambda y(x)$ y la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria (utilizando solo derivadas de Caputo) resulta

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + {}_x^C D_b^\alpha \frac{\partial F}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha y} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$y'(x) - \lambda - \frac{d}{dx}(y(x)) + {}_x^C D_1^\alpha \left[2\, {}_0^C D_x^\alpha [y] \right](x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$y'(x) - \lambda - y'(x) + {}_x^C D_1^\alpha \left[2\, {}_0^C D_x^\alpha [y] \right](x) = 0 \Longleftrightarrow$$

$${}_x^C D_1^\alpha \left[{}_0^C D_x^\alpha [y] \right](x) = \frac{\lambda}{2}$$

cuya solución es

$$y(x) = \frac{\lambda}{2\alpha} \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)^2}\, {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) + \widetilde{c}_1 x^\alpha + c_2$$

Ahora teniendo en cuenta las restricciones, $y(0)=0$, $y(1)=0$ e $I(y)=\int_0^1 [y(x)]\,dx=1$, obtenemos

$$y(x)=(\alpha+1)(2\alpha+1)[2\,{}_2F_1(1,-\alpha,1+\alpha,x)-1]x^{\alpha}$$

Por último, tomando límite en y cuando $\alpha\to 1$ tenemos

$$\lim_{\alpha\to 1} y(x) = -6x^2+6x$$

que es la solución del problema clásico asociado
$J(y)=\int_0^1 \left[y(x)y'(x)+y'^2(x)\right]dx \longleftarrow \quad J(y)=\int_0^1 \left[y(x)y'(x)+\left({}_0^C D_x^{\alpha}[y]\right)^2(x)\right]dx$
sujeto a las condiciones
$I(y)=\int_0^1 [y(x)]\,dx=1$, $y(0)=0$ e $y(1)=0$

CONCLUSIONES

- Hemos logrado encontrar una ecuación de Euler-Lagrange en forma integral que contiene derivadas fraccionarias de un solo tipo.
- Hemos probado que si en lagrangiano es una función C^2, existe una ecuación fraccionaria de Euler-Lagrange que depende solo de las derivadas de Caputo.
- Hemos encontrado solución a un ejemplo de un problema isoperimétrico fraccionario, recuperando la solución del problema isoperimétrico clásico asociado, verificando que las ecuaciones diferenciales con derivada fraccionaria extienden los resultados de las ecuaciones diferenciales clásicas.

GRACIAS

Bibliografía

- AGRAWAL O.P., *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems*, J. Math. Anal. Appl. 272(1), pp368-379, 2002.
- ALMEIDA R., TORRES D., *Neccesary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives*, arXiv:1007.2937v1, 2010.
- ALMEIDA R., FERREIRA R., TORRES D., *Isoperimetric problems of the calculus of variations with fractional derivatives*, arXiv:1105.2078v1, 2011.
- DIETHELM K., *The analysis of fractional differential equations*, Springer, 2004.
- LAZO M., TORRES D., *The DuBois-Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and an Euler-Lagrange equation involving only derivatives of Caputo*,J. Optim. Theory and Appl. 156, pp56-67, 2013.
- MALINOWSKA A.B., ODZIJEWICZ T., TORRES D., *Advances methods in the fractional calculus of variations*, Springer, 2015.
- MALINOWSKA A.B., ODZIJEWICZ T., TORRES D., *Fractional Variational Calculus with Classical and Combined Caputo Derivatives*, Springer, 2015.
- MALINOWSKA A.B., TORRES D., *Generalized natural boundary conditions for fractional variational problems in terms of the Caputo derivative*, Comput. Math. Appl. 59(9), pp 3110-3116, 2010.
- VAN BRUNT B. *The calculus of variations*,Springer Verlag, New York, 2004.