Modelo de difusión para especies con atracción a la humedad

L. Biedma, D. Fernández, R. Marchesini,
M. de los A. Martínez, M. Zárate.

CIEM–CONICET, FaMAF–UNC,

Reunión Anual UMA 2016

Problema Biológico

Determinar de que manera los cambios que el hombre realiza sobre el terreno afecta a una determinada población de especies con preferencia a la humedad.

Características que deben ser consideredas:

- atracción hacia charcas y lugares húmedos,
- evitan zonas áridas o de poca vegetación,
- no recorren largas distancias.

Datos con los que se cuenta:

- presencia o ausencia de la especie en determinado lugar (georeferenciado).

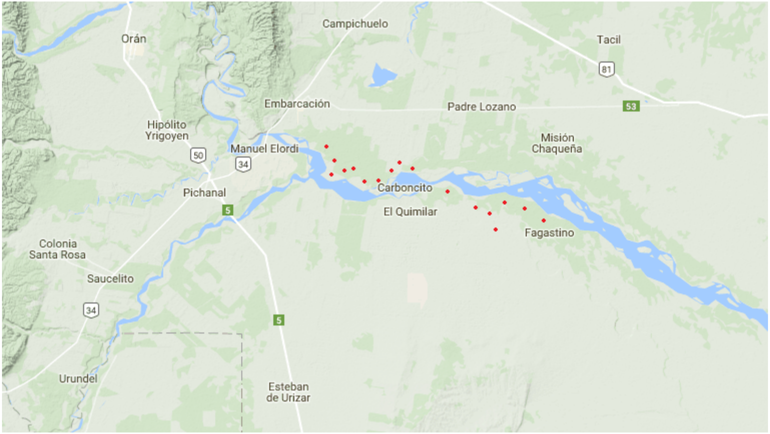

Figure : Lugares de medición con información de presencia o ausencia de las especies.

Sea $u : \Omega \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $u(x,t)$ es la población de cierta especie en x al tiempo t y satisface la siguiente EDP[1]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(d(x)\nabla u) + \operatorname{div}(u\nabla h(x)) &= r(x)u\left(\frac{u}{\alpha(x)} - 1\right)\left(1 - \frac{u}{K(x)}\right) && \text{en } \Omega \times [0,T] \\
d(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u &= 0 && \text{en } \Gamma \times [0,T],
\end{aligned}
$$

donde Γ es la frontera de Ω y,

- $d(x) > 0$ coeficiente de difusión,
- $r(x) > 0$ la tasa de crecimiento,
- $K(x) > \alpha(x) > 0$ con K la capacidad de carga y α el coeficiente del efecto Allee,
- $\beta(x) \geq 0$ tasa de ingresos a la región
- ∇h gradiente de concentración de humedad.

[1] R.S. Cantrell and C. Cosner. Spatial ecology via reaction-diffusion equations. John Wiley & Sons, 2004.

Modelo Cuasi Estacionario

Ya que pensamos en especies endémicas, se consideró a posteriori un estado cuasi estacionario de la población, i.e., $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tal que :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(d(x)\nabla u) + \mathrm{div}(u\nabla h(x)) &= r(x)u\left(\frac{u}{\alpha(x)} - 1\right)\left(1 - \frac{u}{K(x)}\right) & \text{en } \Omega \\ d(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u &= 0 & \text{en } \Gamma. \end{aligned}$$

Incógnitas:

- funciones d, r, K, α y β.

Simplificación:

- Ω posee solo algunas regiones distintas, $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n_{reg}}$,
- las funciones anteriores son constantes en cada región Ω_r.

Para simplificar notación, definimos:

$$p_1 = d,\ p_2 = \beta,\ p_3 = r,\ p_4 = r\left(\tfrac{1}{\alpha} + \tfrac{1}{K}\right)\ \text{y}\ p_5 = \tfrac{r}{\alpha K}.$$

De esta manera,

$$ru\left(\tfrac{u}{\alpha} - 1\right)\left(1 - \tfrac{u}{K}\right) = -p_3 u + p_4 u^2 - p_5 u^3,$$

con $\alpha = \frac{p_4 - \sqrt{p_4^2 - 4p_3p_5}}{2p_5}$ y $K = \frac{p_4 + \sqrt{p_4^2 - 4p_3p_5}}{2p_5}$.

Como $p_\ell(x) = p_{\ell r}$ si $x \in \Omega_r$, entonces...

Para simplificar notación, definimos:

$$p_1 = d,\ p_2 = \beta,\ p_3 = r,\ p_4 = r\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{K}\right) \text{ y } p_5 = \frac{r}{\alpha K}.$$

De esta manera,

$$ru\left(\frac{u}{\alpha} - 1\right)\left(1 - \frac{u}{K}\right) = -p_3 u + p_4 u^2 - p_5 u^3,$$

con $\alpha = \frac{p_4 - \sqrt{p_4^2 - 4p_3p_5}}{2p_5}$ y $K = \frac{p_4 + \sqrt{p_4^2 - 4p_3p_5}}{2p_5}$.

Como $p_\ell(x) = p_{\ell r}$ si $x \in \Omega_r$, entonces...

el problema consiste en hallar números positivos $p_{\ell r}$,
con $\ell = 1, \ldots, 5$, $r = 1, \ldots, n_{reg}$
tales que $4p_{3r}p_{5r} - {p_{4r}}^2 < 0$.

Ajuste Cuadrático

La población en estado estacionario solo puede tomar dos valores: $u = 0$ o $u = K$.

Sea $\mathcal{T}$ el subconjunto de los datos $\{1, \ldots, n_{dat}\}$ donde se detectó presencia de individuos alrededor de $x_\tau \in \Omega$. Por lo tanto se propone minimizar el funcional

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_\Omega (u(x) - K(x))^2 \chi_{\varepsilon,\tau}(x) dx + \sum_{\tau \notin \mathcal{T}} \int_\Omega u(x)^2 \chi_\varepsilon(x) dx,$$

donde u es solución de la EDP y $\chi_{\varepsilon,\tau} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisface:

- $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\varepsilon,\tau}(x)\, dx = 1$ y,
- $\operatorname{supp}(\chi_{\varepsilon,\tau}) \subset B(x_\tau, \varepsilon)$.

Problema de Control Optimal

Matemáticamente el problema a resolver es

$$\begin{aligned} \underset{u,p}{\text{minimizar}} \quad & J(u,p) \\ \text{sujeto a} \quad & E(u,p) = 0, \\ & p \in P_{ad}, \end{aligned}$$

donde $J : H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{5n_{reg}} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$J(u,p) = \frac{1}{2} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_\Omega (u - K)^2 \chi_{\varepsilon,\tau} + \frac{1}{2} \sum_{\tau \notin \mathcal{T}} \int_\Omega u^2 \chi_{\varepsilon,\tau} + \rho \sum_{\ell=1}^{5} \sum_{r=1}^{n_{reg}} \left(\frac{1}{2} p_{\ell r}^2 - \log(p_{\ell r}) \right),$$

$E : H^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{5n_{reg}} \mapsto H^1(\Omega)^*$ es la forma débil de la EDP y,

$$P_{ad} = \{ p \in \mathbb{R}^{5n_{reg}} \mid 4p_{3r}p_{5r} - p_{4r}^2 \leq 0,\ r = 1, \ldots, n_{reg} \}.$$

Determinando ∇h y las regiones

- Para determinar el gradiente de la humedad se utilizó el Normalized Difference Water Index (NDWI).

- Para determinar los tipos de regiones se utilizó el Normalized Difference Vegetation Index (NDVI).

Al considerar la variable temporal el problema se resolvió con un algoritmo del tipo SQP.

Dar $p^0 \in \mathbb{R}^{5n_{reg}}$ y definir $k = 0$,

1. Usando p^k calcular u_{p^k} y λ_{p^k}.
2. Calcular $\nabla \tilde{J}(p^k)$.
3. Obtener p^{k+1} solución de

$$\begin{array}{rl} \underset{p}{\text{minimizar}} & \tilde{Q}_k(p) \\ \text{s.a.} & p \in P_k \end{array}$$

4. Hacer $k = k + 1$ y regresar al paso 1,

donde $\tilde{Q}_k$ es una aproximación cuadrática de $\tilde{J}$ en p^k y P_k es una aproximación poliedral de P_{ad} en p^k.

Primer enfoque del problema

- El problema se planteó utilizando elementos triangulares y con variable temporal, dejando evolucionar el tiempo. Posee graves problemas numéricos (memoria y procesamiento).

- Por qué no pensar en una versión con elementos cuadrados y estado cuasi estacionario? Requiere menos almacenamiento en memoria y posee una estructura separable.

Segundo enfoque del problema

Errores y aciertos...

- Consideramos un estado estacionario de la población.
- Se intentón resolver el problema $E(u, p) = 0$ a partir del método alternante de Schwarz.
- Multiplicadores de Lagrange basados en subestructuración...

Errores y aciertos...

- Consideramos un estado estacionario de la población.
- Se intentón resolver el problema $E(u, p) = 0$ a partir del método alternante de Schwarz. ERROR!
- Multiplicadores de Lagrange basados en subestructuración...

Muchas gracias !!