Convergencia de modelos exponenciales con dispersión bivariados

Gabriela Boggio, Lila Ricci, J. Raúl Martínez

Fac. de Ciencias Económicas y Estadística - Universidad Nacional de Rosario
Fac. de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de Mar del Plata
Fac. de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba

19 de septiembre de 2016

Modelos exponenciales con dispersión
Familia exponencial natural

Dados ν una medida σ finita sobre $\mathbb{R}$ y $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \kappa(\theta) < \infty\}$, ambos no degenerados, las medidas de probabilidad

$$P(A) = \int_A exp\left\{\theta z - \kappa(\theta)\right\} \nu(dz)$$

representan una **familia exponencial natural (FEN)**(Nelder y Wedderburn [5]) donde
$\kappa(\theta) = log \int e^{\theta z} \nu(dz)$: función acumulante

Modelos con dispersión. Formas aditiva y reproductiva

Sea Λ el conjunto de $\lambda > 0$ tales que

$$\lambda\kappa(\theta) = log \int e^{\theta z} \nu_\lambda(dz)$$

para alguna medida ν_λ.
La FEN generada por ν_λ es:

$$exp\left\{\theta z - \lambda\kappa(\theta)\right\} \nu_\lambda(dz)$$

Jørgensen [2] define los modelos exponenciales con dispersión (ED) en sus dos formas:

Modelo exponencial con dispersión aditivo:

Familia de distribuciones de Z generadas por ν para $(\theta, \lambda) \in \Theta x \Lambda$

$$Z \sim ED^*(\theta, \lambda)$$

Modelo exponencial con dispersión reproductivo:

Familia de distribuciones de $Y = Z/\lambda$ (transformación de escala) generadas por ν

$$Y \sim ED(\mu, \sigma^2) \text{ donde } \mu = \tau(\theta) \text{ y } \sigma^2 = 1/\lambda$$

$$Y \sim ED(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z \sim ED^*(\theta, \lambda)$$

Función generadora de acumulantes

Función generadora de acumulantes (FGA) de una FEN:

$$s \mapsto \kappa(\theta + s) - \kappa(\theta)$$

FGA de $Z \sim ED^*(\theta, \lambda)$:

$$K^*(s; \theta, \lambda) = \lambda \left\{ \kappa(\theta + s) - \kappa(\theta) \right\}$$

para $s \in \Theta - \theta$
FGA de $Y = Z/\lambda \sim ED(\mu, \sigma^2)$:

$$K(s; \theta, \lambda) = \lambda \left\{ \kappa(\theta + s/\lambda) - \kappa(\theta) \right\}$$

para $s \in \lambda(\Theta - \theta)$

Función del valor medio y función varianza

Densidades:

$ED^*(\theta, \lambda) \to p^*(z; \theta, \lambda) = c^*(z; \lambda) exp \left\{ \theta z - \lambda \kappa(\theta) \right\}, z \in \mathbb{R}$

$ED(\mu, \sigma^2) \to p(y; \theta, \lambda) = c(y; \lambda) exp \left[\lambda \left\{ \theta y - \kappa(\theta) \right\} \right], y \in \mathbb{R}$

Función del valor medio:

$\tau : int\Theta \to \mathbb{R}$ tal que $\tau(\theta) = \kappa'(\theta)$ y $\Omega = \tau(int\Theta)$ el dominio medio

Función varianza unitaria :

$V : \Omega \to \mathbb{R}_+$ tal que $V(\mu) = \tau' \left\{ \tau^{-1}(\mu) \right\}$

$$E(Z) = \lambda\mu \text{ y } Var(Z) = \lambda V(\mu)$$

$$E(Y) = \mu \; y \; Var(Y) = \sigma^2 V(\mu)$$

Modelos Tweedie

El modelo Tweedie es el modelo ED reproductivo con función varianza unitaria:

$$V_p(\mu) = \mu^p, \ \mu \in \Omega_p \text{ y } p \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$$

$$Y \sim Tw_p(\mu, \sigma^2)$$

$$E(Y) = \mu \ \ Var(Y) = \sigma^2 \mu^p, \ \mu \in \Omega_p$$

Ejemplos:

$$Tw_0(\mu, \sigma^2) = N(\mu, \sigma^2)$$
$$Tw_1(\mu, \sigma^2) = \sigma^2 P_0(\mu/\sigma^2)$$
$$Tw_2(\mu, \sigma^2) = Ga(\mu, \sigma^2)$$

Modelos Tweedie

Características importantes :

- Amplio rango de variación de p. Ej: $1 < p < 2$ permite modelar datos con distribución continua para valores positivos pero donde el valor cero ocurre con probabilidad positiva.
- Dunn y Smyth (2005) desarrollan programación en el entorno "R" para su estimación.
- Familia cerrada ante cambios de escala$\rightarrow$modela cantidades positivas continuas con una escala de medición arbitraria.
- **Distribución límite de muchos modelos exponenciales con dispersión.**

Teoremas de convergencia

Convergencia de tipo *Teorema Central del Límite*: el parámetro de dispersión se acerca a cero.

Convergencia de tipo *variación regular* o *tipo Tauber*: el parámetro medio se acerca a cero o infinito pero el parámetro de dispersión es constante.

Objetivo de nuestro trabajo:

Extender a R^2 resultados sobre convergencia de tipo *variación regular* de modelos ED univariados a modelos Tweedie.

Definiciones

$u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es de **variación regular en infinito con exponente** $\gamma \in \mathbb{R}$ si, para todo $x > 0, t > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(tx)}{u(t)} = x^{\gamma}$$

La función u es de **variación regular en cero** si $u(1/x)$ es de variación regular en infinito.
$L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ se dice que es de **variación lenta en infinito (cero)** cuando $\gamma = 0$.
Una función de variación regular en infinito (cero) se puede expresar como:

$$u(x) = x^{\gamma} L(x)$$

Definiciones

Una medida ν sobre $\mathbb{R}_+$ se dice que varía regularmente con exponente γ si $\bar{\nu}(x) = \nu\{(0,x]\}$ varía regularmente con exponente γ en el apropiado extremo de $\mathbb{R}_+$.
Si ν tiene densidad con respecto a la medida de Lebesgue de la forma

$$\nu(dx) = g(x)x^{\gamma-1}$$

donde g es analítica en cero y $g(0) \neq 0$, ν es de variación regular en cero con exponente γ

Teorema de Tauber

Sea ν una medida sobre $\mathbb{R}_+$ que varía regularmente. La función acumulante de la FEN generada por ν tiene la forma:

$$e^{\kappa(\theta)} = (-\theta)^{-\gamma} L(-\theta)$$

donde L es una función de variación lenta en infinito y $0 \leq \gamma < \infty$.

Teorema (Jørgensen, Martínez y Tsao)

Sea $ED(\mu, \sigma^2)$ generado por la medida ν con soporte S$\subseteq (0, \infty)$. Supongamos que ν varía regularmente en cero o en infinito, de manera que por el Teorema de Tauber,

$$e^{\kappa(\theta)} = (-\theta)^{-\gamma} L(-\theta)$$

para algún $\gamma > 0$, donde L es de variación suave en infinito o cero, respectivamente. Si $f(x) = \log L(x)$ satisface

$$\lim_{x \to \infty} xl'(x) = 0, \text{ o } \lim_{x \to 0} l'(x) = 0,$$

luego para $\mu > 0$ y σ^2 tal que $1/\sigma^2 \in \Lambda$

$$\frac{1}{c} ED(c\mu, \sigma^2) \xrightarrow{d} Ga\left(\mu, \sigma^2/\gamma\right)$$

para c tendiendo a cero o infinito, respectivamente.

Modelos exponenciales con dispersión multivariados
Introducción

Siguiendo un procedimiento análogo al empleado en el caso univariado:

Familia exponencial natural multivariada:

$$f(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta}) = a(\mathbf{z})exp\left[\mathbf{z}^T\boldsymbol{\theta} - \kappa(\boldsymbol{\theta})\right] \text{ para } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k,$$

con respecto a una medida adecuada sobre $\mathbb{R}^k$, para alguna función a, donde $\Theta = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{\mathbf{k}} : \int \mathbf{a}(\mathbf{z})e^{\mathbf{z}^T\boldsymbol{\theta}}d\mathbf{z} < \infty\right\}$.

$$\kappa_\theta(\mathbf{s}) = \kappa(\mathbf{s}+\boldsymbol{\theta}) - \kappa(\boldsymbol{\theta}) \text{ para } \mathbf{s} \in \Theta - \boldsymbol{\theta}$$

Modelo exponencial con dispersión aditivo:

$$f^*(\mathbf{z};\boldsymbol{\theta},\lambda) = a^*(\mathbf{z};\lambda) exp\left[\mathbf{z}^T\boldsymbol{\theta} - \lambda\kappa(\boldsymbol{\theta})\right] \text{ para } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k,$$

para alguna función $a^*(\mathbf{z};\lambda)$, la cual corresponde a reemplazar la función acumulante κ por $\lambda\kappa$.

$$E(\mathbf{Z}) = \lambda\boldsymbol{\mu} \text{ y } Var(\mathbf{Z}) = \lambda\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$$

Modelo exponencial con dispersión reproductivo:
Aplicando la transformación de escala $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}/\lambda$,

$$f(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta},\lambda) = a(\mathbf{y};\lambda) exp\left\{\lambda\left[\mathbf{y}^T\boldsymbol{\theta} - \kappa(\boldsymbol{\theta})\right]\right\} \text{ para } \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k,$$

$$E(\mathbf{Y}) = \mu \text{ y } Var(\mathbf{Y}) = \lambda^{-1}\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu}).$$

Jørgensen y Martinez [4] desarrollan un método de construcción de modelos ED multivariados de manera de obtener una estructura de correlación más flexible.

El caso bivariado

Dado un *modelo exponencial con dispersión aditivo* con un único parámetro λ , la FGA es:

$$(s,t) \longmapsto \lambda\kappa_\theta(s,t),\ \ \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Método de convolución extendido:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix}$$

donde los tres vectores del lado derecho se consideran independientes

FGA bivariada para el vector aleatorio $\mathbf{Z}$:

$$K_{\boldsymbol{\theta}}(s,t) = \lambda_{12}\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s,t) + \lambda_1\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s,0) + \lambda_2\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(0,t).$$

Por medio del cálculo de $\dot{\kappa}_1(\theta_1,\theta_2)$ y $\dot{\kappa}_2(\theta_1,\theta_2)$, las dos componentes de $\dot{\kappa}(\theta_1,\theta_2)$ y de $\ddot{\kappa}_{ij}(\theta_1,\theta_2)$ para $i,j = 1,2$, se obtienen:

$$E(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 \\ \lambda_{22}\mu_2 \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_{12} + \lambda_1 = \lambda_{11}$; $\lambda_{12} + \lambda_2 = \lambda_{22}$ y μ_j son las componentes de $\boldsymbol{\mu}$, $j = 1,2$

$$Cov(\mathbf{Z}) = \mathbf{\Lambda} \odot V(\boldsymbol{\mu})$$

donde $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz de pesos definida por

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{V}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} V_{11}(\boldsymbol{\mu}) & V_{12}(\boldsymbol{\mu}) \\ V_{21}(\boldsymbol{\mu}) & V_{22}(\boldsymbol{\mu}) \end{bmatrix}$$

Forma aditiva del modelo bivariado: $ED^*(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda})$

La forma reproductiva del modelo ED bivariado se obtiene aplicando la transformación de escala:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1/\lambda_{11} \\ Z_2/\lambda_{22} \end{bmatrix}$$

con parámetros:

$$E(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Y}) = = \boldsymbol{\Sigma} \odot V(\boldsymbol{\mu})$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$, la matriz de dispersión, es:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}\lambda_{22}} & \frac{1}{\lambda_{22}} \end{bmatrix}$$

Forma reproductiva del modelo bivariado: $ED(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Convergencia de los modelos multivariados

En base a los resultados de convergencia presentados para el caso univariado, se especula que los modelos ED bivariados recién presentados pueden converger bajo ciertas condiciones a una distribución de probabilidad Tweedie o más aún a una distribución tipo gamma como extensión del Teorema desarrollado por Jørgensen, Martínez y Tsao para el caso univariado.

Definiciones

Omey y Willekens [6] extienden las definiciones de variación regular a $\mathbb{R}^k$.

El caso bivariado

Una función medible $u : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ es de **variación regular en infinito** con exponentes α y $\beta \in \mathbb{R}$ si para todo $x, y > 0$, el límite

$$\lim_{min(t,s)\to\infty} \frac{u(tx, sy)}{u(t, s)} = x^\alpha y^\beta$$

existe y es finito.

Definiciones

La función u será de **variación regular en cero** si para todo $x\,, y > 0,\ u\left(1/x, 1/y\right)$ es de variación regular en infinito.
Notación: $u \in VR\left(\alpha, \beta\right)_{\infty(0)}$.

▷

Si $\alpha = \beta$ y $t = s$ →defínción de variación regular de Stam [7] :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(tx, ty)}{u(t,t)} = (xy)^{\alpha}$$

Definiciones

Una función $L(x, y)$ es de **variación lenta en infinito** si para cualquier $x,\ y > 0$

$$\lim_{min(t,s)\to\infty} \frac{L(tx, sy)}{L(t, s)} = 1$$

La función L será de **variación lenta en cero** si para todo $x\ , y > 0,\ L\left({}^{1}/_{x}, {}^{1}/_{y}\right)$ es de variación lenta en infinito.
Notación: $L \in VL_{\infty(0)}$.
$u\left(x, y\right) \in VR\left(\alpha, \beta\right)_{\infty(0)} \Leftrightarrow u(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta} L(x, y)$ donde $L \in VL_{\infty(0)}$

Transformada de Laplace bivariada

Dada una medida ν sobre $\mathbb{R}_+^2$ su transformada de Laplace es la función en $\mathbb{R}_+^2$ dada por

$$\omega(t,s) = \iint_0^\infty e^{-tx-sy}\nu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$

Teorema de Tauber-Karamata

Sea ν una medida sobre $\mathbb{R}_+^2$ con la transformada de Laplace recién definida , sea $L \in VL_{\infty(0)}$ y sean α y β no negativos. Entonces

$$\bar{\nu}(t,s) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^{\alpha} s^{\beta} L(t,s) \iff \omega\left(\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right) \sim t^{\alpha} s^{\beta} L(t,s)$$

cuando $min(t,s) \to \infty\,(0)$

Convergencia tipo Tauber

Dado un modelo ED bivariado $ED(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ generado por la medida ν con soporte $S \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$. Si $\nu \in VR\left(\alpha, \beta\right)_{\infty(0)}$, por la extensión del Teorema de Tauber-Karamata para el caso bivariado, la FGM para ν tiene la forma

$$M_\nu(\theta_1, \theta_2) = (-\theta_1)^{-\alpha} (-\theta_2)^{-\beta} L(-\theta_1, -\theta_2), \ \theta_1, \theta_2 < 0$$

para algún $\alpha > 0$, $\beta > 0$ donde $L \in VL_{\infty(0)}$.
Se quiere estudiar si $\frac{1}{c} ED(c\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ converge en distribución, cuando $c > 0$ tiende a cero o infinito, respectivamente a una distribución bivariada de tipo gamma tal como ocurre en el caso univariado

$$¿\frac{1}{c} ED(c\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \xrightarrow{d} Ga\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha,\beta}\right)?$$

Extensión bivariada del Teorema de Jørgensen, Martínez y Tsao

Se considerará el caso particular en que $\alpha = \beta$. La FGM para ν tiene la forma

$$M_\nu(\theta_1, \theta_2) = (-\theta_1)^{-\alpha} (-\theta_2)^{-\alpha} L(-\theta_1, -\theta_2), \; \theta_1, \theta_2 < 0$$

donde $L \in VR_{\infty(0)}$, respectivamente.
Se parte de $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T \sim ED^*(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda})$ con:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

y FGA:

$$K^*(s_1, s_2; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda}) = \lambda_{12}\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, s_2) + \lambda_1\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, 0) + \lambda_2\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(0, s_2)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\kappa_{\boldsymbol{\theta}}(s_1, s_2) = \kappa(s_1 + \theta_1, s_2 + \theta_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2),$$

$$\begin{aligned}
K^*(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) &= \lambda_{12}\left[\kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2 + s_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)\right] \\
&+ \lambda_1\left[\kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)\right] \\
&+ \lambda_2\left[\kappa(\theta_1, \theta_2 + s_2) - \kappa(\theta_1, \theta_2)\right] \\
&= \lambda_{12}\kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2 + s_2) + \lambda_1\kappa(\theta_1 + s_1, \theta_2) + \lambda_2\kappa(\theta_1, \theta_2 \\
&- (\lambda_{12} + \lambda_1 + \lambda_2)\,\kappa(\theta_1, \theta_2).
\end{aligned}$$

$$M^*(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) = e^{K^*(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2;\theta_1,\theta_2;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12})}$$

$$= \frac{\left[e^{\kappa(\theta_1+s_1,\theta_2+s_2)}\right]^{\lambda_{12}} \left[e^{\kappa(\theta_1+s_1,\theta_2)}\right]^{\lambda_1} \left[e^{\kappa(\theta_1,\theta_2+s_2)}\right]^{\lambda_2}}{\left[e^{\kappa(\theta_1,\theta_2)}\right]^{\lambda_{12}+\lambda_1+\lambda_2}}$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{\kappa(\theta_1,\theta_2)} = (-\theta_1)^{-\alpha} (-\theta_2)^{-\alpha} L(-\theta_1, -\theta_2)$$

y trabajando algebraicamente:

$$M^*(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}) = \left(1 + \frac{s_1}{\theta_1}\right)^{-\alpha(\lambda_{12}+\lambda_1)} \left(1 + \frac{s_2}{\theta_2}\right)^{-\alpha(\lambda_{12}+\lambda_2)} \left[\frac{L\left(-\theta_1 - s_1, -\theta_2 - s_2\right)}{L\left(-\theta_1, -\theta_2\right)}\right]^{\lambda_{12}} \left[\frac{L\left(-\theta_1 - s_1, -\theta_2\right)}{L\left(-\theta_1, -\theta_2\right)}\right]^{\lambda_1} \left[\frac{L\left(-\theta_1, -\theta_2 - s_2\right)}{L\left(-\theta_1, -\theta_2\right)}\right]^{\lambda_2}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \left(\frac{Z_1}{\lambda_1}, \frac{Z_2}{\lambda_2}\right)^T$ y por propiedad de las FGM:

$$M\left(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}\right) = M\left(s_1, s_2; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}\right) = M^*\left(\frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_2}{\lambda_2}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Lambda}\right)$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
M(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}) \quad = \quad & \left(1 + \frac{s_1}{\lambda_1 \theta_1}\right)^{-\alpha(\lambda_{12}+\lambda_1)} \left(1 + \frac{s_2}{\lambda_2 \theta_2}\right)^{-\alpha(\lambda_{12}+\lambda_2)} \\
& \left[\frac{L\left(-\theta_1 - \frac{s_1}{\lambda_1}, -\theta_2 - \frac{s_2}{\lambda_2}\right)}{L\left(-\theta_1, -\theta_2\right)}\right]^{\lambda_{12}} \\
& \left[\frac{L\left(-\theta_1 - \frac{s_1}{\lambda_1}, -\theta_2\right)}{L\left(-\theta_1, -\theta_2\right)}\right]^{\lambda_1} \left[\frac{L\left(-\theta_1, -\theta_2 - \frac{s_2}{\lambda_2}\right)}{L\left(-\theta_1, -\theta_2\right)}\right]^{\lambda_2}
\end{aligned}
$$

.

Se está en condiciones de hallar:

$$\lim_{c \to 0} M(\mathrm{s}_1, \mathrm{s}_2; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda})$$

Para ello:
Se requiere utilizar una extensión del Teorema de representación de Karamata, que permite reexpresar la función L [1].
Se deben adaptar al caso bivariado resultados acerca del $\lim_{\mu \to 0} \frac{V(\mu)}{\mu^2}$ desarrollados por Jørgensen, Martinez y Tsao [3].

Consideraciones finales

I

- Primer resultado sobre convergencia de tipo Tauber para el caso de un modelo bivariado
- Caracterización de los dominios de atracción a modelos Tweedie bivariados
- Contribución a la metodología desarrollada para modelizar datos multivariados no normales
- Primer paso hacia el estudio del caso multivariado general

Referencias Bibliográficas I

[1] L. de Haan and S. Resnick. On regular variation of probability densities. *Stochastic Processes and their Applications*, 25(0):83 – 93, 1987.

[2] B. Jorgensen. *The theory of dispersion models*. Chapman and Hall, 1997.

[3] B. Jørgensen, J. R. Martínez, and M. Tsao. Asymptotic behavior of the variance function. *Scandinavian Journal of Statistics*, 21:223–243, 1994.

[4] B. Jorgensen and R. Martinez. Multivariate exponential dispersion models. In *Multivariate Statistics: Theory and Applications*, pages 73 – 98, Estonia, 2012. World Scientific.

Referencias Bibliográficas II

[5] J.A. Nelder and R.W.M. Wedderburn. Generalized linear models. *J. R. Statistics Society; Series A*, 135:370–384, 1972.

[6] E. Omey and E. Willekens. Abelian and Tauberian theorems for the Laplace transform of functions in several variables. *Journal of Multivariate Analysis*, 30(2):292 – 306, 1989.

[7] A. Stam. Regular variation in R_+^d and the Abel-Tauber theorem. *Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Groningen*, preprint, 1977.