Principal eigenvalues of integro-differential elliptic equations with a drift term

Ariel Salort
(Universidad de Buenos Aires)

Trabajo conjunto con

Alexander Quaas
(Universidad Técnica Federico Santa María)
Aliang Xia
(Jiangxi Normal University)

LXV Reunión anual de la U.M.A.
Bahía Blanca, 22 de septiembre de 2016

El caso clásico

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u(x)) = \mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + b(x)\cdot\nabla u(x) & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

donde $A(x) = (a_{ij}(x))$ es definida positiva y simétrica p/c $x \in \Omega$, y A y b tienen coeficientes acotados en Ω.
Observar que $\mathcal{L}$ está dado en forma de divergencia. Utilizando la teoría de operadores compactos, simétricos y autoadjuntos se prueba que:

Teorema

El operator autoadjunto $\mathcal{L}$ posee una sucesión infinita, discreta y numerable de autovalores $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \to \infty$ cuyas autofunciones forman una base de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Es más, se tiene una caracterización variacional de los autovalores

Teorema

El primer autovalor está dado por
$\lambda_1 = \inf\{J(u) : u \not\equiv 0, u \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$,
es simple y tiene una autofunción con signo constante. J *es el cociente* $J(u) = \frac{\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u + bu\cdot\nabla u + cu^2\,dx}{\int_\Omega u^2\,dx}$.

Teorema

Es más, los autovalores se pueden escribir variacionalmente como

$$\lambda_k = \inf J(U)$$

donde ínfimo se toma sobre las $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \not\equiv 0$ *tales que* $(u, v) = 0\ \forall v \in \{V_1, \cdots, V_{k-1}\}$, *siendo* V_i *el autoespacio de* λ_i.

Introducción

Sin embargo, en el caso en el que el operador no está dada en forma de divergencia,

$$\mathcal{L}(u(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + b(x) \cdot \nabla u(x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

resulta que no es autoadjunto y no se puede aplicar la misma teoría. Es más, los autovalores y autovectores en general son complejos.

Sin embargo, utilizando los resultados de Krein-Rutman se puede probar que:

Teorema

El operador $\mathcal{L}$ con condiciones de contorno Dirichlet posee un autovalor principal λ_1 que es real, i.e., si λ es cualquier otro autovalor, $Re(\lambda) \geq \lambda_1$.

λ_1 es simple y su autofunción tiene signo constante en Ω.

Problema no local

En este trabajo consideramos operadores elípticos no locales y no dados en forma de divergencia con un término gradiente:

$$\mathcal{I}u(x) = \inf_{a\in A} \sup_{b\in B} L_{K_{a,b}} u(x) + c(x) \cdot \nabla u(x)$$

donde $\{L_{K_{a,b}}\}_{a\in A, b\in B}$ es una familia de operadores lineales integro-diferenciales dada por

$$L_{K_{a,b}} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(u, x; y) K_{a,b}(y)\, dy,$$
$$\delta(u, x, y) = u(x+y) + u(x-y) + 2u(x).$$

La función c es uniformemente acotada en Ω y la familia de núcleos $\{K_{a,b}\}_{a\in A, b\in B}$ es simétrica y comparable con respecto al núcleo del laplaciano fraccionario $-(-\Delta)^s$, for $s \in (0, 1)$.

Esto es,

- Cada $\mathcal{I} \in \mathcal{L}$ es de la forma $\mathcal{I} = L_K + c \cdot \nabla$ for $K \in \mathcal{K}$.
- Existen constantes $\lambda \leq \Lambda$ tales que

$$K^-(y) := \frac{2}{|y|^{n+2s}} \lambda(1-s) \leq K(y) \leq \frac{2\Lambda}{|y|^{n+2s}} (1-s) := K^+(y)$$

- Existe $c^+ > 0$ such that $|c| \leq c^+$ uniformemente en Ω.
  Entonces definimos los operadores maximales de Pucci

$$\mathcal{M}^{\pm}_{\mathcal{L}} u(x) = \mathcal{M}^{\pm}_{\mathcal{K}} u(x) \pm c^+ |\nabla u(x)|,$$

donde si $S^+(t) = \Lambda t_+ - \lambda t_-$ y $S^-(t) = \lambda t_+ - \Lambda t_-$,

$$\mathcal{M}^+_{\mathcal{K}} u(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} L_K u(x) = 2(1-s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{S^+(\delta(u,x,y))}{|y|^{n+2s}} \, dy,$$

$$\mathcal{M}^-_{\mathcal{K}} u(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} L_K u(x) = 2(1-s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{S^-(\delta(u,x,y))}{|y|^{n+2s}} \, dy.$$

Con estas definiciones diremos que

Definición

Un operador $\mathcal{I}$ *es elíptico con respecto a la familia de operadores lineales* $\mathcal{L}$ *si*

$$\mathcal{M}^-_{\mathcal{L}}(u-v)(x) \leq \mathcal{I}u(x) - \mathcal{I}v(x) \leq \mathcal{M}^+_{\mathcal{L}}(u-v)(x).$$

Una familia de operadores que satisface las condiciones previas es

$$\mathcal{L} = \{L_c = -(-\Delta)^s + c\cdot\nabla \,:\, |c| \leq c^+\}$$

Definición

Decimos que $\mathcal{I}$ *es un operador continuo respecto a* $\mathcal{L}$ *en* Ω *si*

(1) $\mathcal{I}$ *es elíptico respecto a* $\mathcal{L}$ *en* Ω,

(2) $\mathcal{I}u(x)$ *está bien definido para* $u \in C^{1,1}(x) \cap L^1(\omega_s)$ *y* $x \in \Omega$,

(3) $\mathcal{I}u$ *es continuo en* $B_r(x_0)$ $\forall u \in C^2(B_r(x_0)) \cap L^1(\omega_s)$ *y* $B_r(x_0) \subset \Omega$, *donde*

$$\omega_s(dy) = \min\{1, |y|^{-(n+2s)}\}dy.$$

Si definimos las cantidades

$$\lambda_1^+(\mathcal{I},\Omega) = \sup_\lambda\{\exists v \in E(\Omega), v > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } v \geq 0 \text{ en } \Omega^c : \mathcal{I}v + \lambda v \leq 0 \ en\ \Omega\}$$

$$\lambda_1^-(\mathcal{I},\Omega) = \sup_\lambda\{\exists v \in E(\Omega), v < 0 \text{ en } \Omega \text{ y } v \leq 0 \text{ en } \Omega^c : \mathcal{I}v + \lambda v \geq 0 \ en\ \Omega\}$$

tenemos que:

Teorema (Q-S-X 2015)

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la condición de la bola exterior, $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Existen funciones $\phi^+, \phi^- \in E(\Omega) = C(\Omega) \cap L^1(\omega_s)$ tales que $\phi^+ > 0$ y $\phi^- < 0$ en Ω, y satisfacen

$$\begin{cases} -\mathcal{I}\phi^+ = \lambda_1^+\phi^+ & in\ \Omega, \\ -\mathcal{I}\phi^- = \lambda_1^-\phi^- & in\ \Omega, \\ \phi^+ = \phi^- = 0 & in\ \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Es más,

Teorema (Q-S-X 2015)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con la condición de la bola exterior y $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Supongamos que existe una solución viscosa $u \in C(\Omega) \cap L^1(\omega_s)$ de

$$\begin{cases} -\mathcal{I}u = \lambda_1^+ u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

o de

$$\begin{cases} -\mathcal{I}u \leq \lambda_1^+ u & \text{in } \Omega, \\ u(x_0) > 0, \quad u \leq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

para algún $x_0 \in \Omega$. Entonces $u = t\phi^+$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Si $v \in C(\Omega) \cap L^1(\omega_s)$ alguna de las dos ecuaciones con λ_1^- en vez de $\lambda_1^+(I, \Omega)$, entonces $v = t\phi^-$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Idea de la prueba del Teorema 1

Definimos el espacio

$$X := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \,:\, f = 0 \text{ in } \Omega^c\},$$

y llamamos K al cono en X con vértice en 0

$$K := \{f \in X \,:\, f \geq 0 \text{ in } \Omega\}$$

el cual induce un orden $\preceq$ en X: si $f, g \in X$

$$f \preceq g \iff g - f \in K.$$

Dada $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, sea u solución viscosa de

$$-\mathcal{I}u = f \text{ en } \Omega, \qquad u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Definimos el operador solución T

$$T(f) := \mathcal{I}^{-1}(-f) = u.$$

Idea de la prueba del Teorema 1

Entonces se prueba que:

- T es $1-$homogeneo
- T es continuo en X
- T es compacto en X
- el orden $\preceq$ es estricto
- vale la condición (H): existe $u \in K$ y $M > 0$: $u \preceq MTu$

Utilizando el Teorema de Krein-Rutman sigue el resultado.

Lo "difícil" es probar la compacidad de T y construir la función u que satisfaga (H).

Regularidad Interior

de la solución de

$$\begin{cases} -\mathcal{I}u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

En [Chang Lara] se prueba la siguiente regularidad Hölder interior para (P):

Lema (Interior regularity)

Sea $f \in L^\infty$ y u una solución viscosa de

$$\begin{cases} -\mathcal{I}u = f & \text{in } B_1 \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus B_1. \end{cases}$$

Entonces $u \in C^\alpha(B_{1/2})$ para un valor universal $\alpha \in (0,1)$, y satisface,

$$\|u\|_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)})$$

para alguna C universal.

Regularidad hasta el Borde

de la solución de

$$\begin{cases} -\mathcal{I}u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{P}$$

Resultados preliminares:

Lema (Comparación)

Si $u \in LSC(\Omega) \cap L^1(\omega_s)$ *y* $v \in USC(\Omega) \cap L^1(\omega_s)$ *son una super-solución y una a sub-solución de* $\mathcal{I}w = f$ *en* Ω*, entonces*

$$u \geq v \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad \text{implica} \quad u \geq v \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

Teorema (Existencia de solución)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *con la condición de la bola exterior,* $\mathcal{I}$ *un operador continuo respecto a* $\mathcal{L}$*,* f *y* g *acotadas. Entonces el problema de Dirichlet*

$$\mathcal{I}u = f \text{ en } \Omega, \qquad u = g \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

tiene una única solución viscosa u.

Teorema (Strong Maximum Principle)

Sea $u \in LSC(\Omega) \cap L^1(\omega_s)$ *una super-solución viscosa de* $-\mathcal{M}^-_{\mathcal{L}} u \geq 0$*,* $u \geq 0$ *in* $\mathbb{R}^n$*. Entonces* $u > 0$ *en* Ω *o* $u \equiv 0$ *en* Ω.

La función $\varphi^\beta(x) := (x_+)^\beta$ permite estudiar el comportamiento de las potencias de la distancia al borde.

Lema

Dado $s \in (0,1)$, para $\beta \in (0,2s)$ $\varphi^\beta(x)$ satisface en $\{x > 0\}$

$$\mathcal{M}^+_{\mathcal{K}}(\varphi^\beta) = c^+(\beta)x^{\beta-2s} \;\; y \;\; \mathcal{M}^-_{\mathcal{K}}(\varphi^\beta) = c^-(\beta)x^{\beta-2s}$$

donde $c^\pm = c^\pm(s,\beta,n)$, y son continuas respecto a s y β in $\{0 < s \leq 1,\, 0 < \beta < 2s\}$. Es más, existen $\beta_1 \leq \beta_2$ in $(0,2s)$ tales que

$$c^+(\beta_1) = 0 \quad \text{and} \quad c^-(\beta_2) = 0$$

Es más,

$$c^+(\beta) < 0 \text{ if } (0,\beta_1), \qquad c^+(\beta) > 0 \text{ if } (\beta_1, 2s)$$

$$c^-(\beta) < 0 \text{ if } (0,\beta_2), \qquad c^-(\beta) > 0 \text{ if } (\beta_2, 2s).$$

En particular, para $-(-\Delta)^s$ se tiene que $\beta_1 \leq s \leq \beta_2$.

Lema

Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega$ *tal que* $d(x_k) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$ *y* $d_k := d(x_k)$. *Dado* $\beta \in (0,2)$ *definimos*

$$g_k(z) := \left(\frac{d(x_k + d_k z)}{d_k}\right)^\beta + \left(\frac{d(x_k - d_k z)}{d_k}\right)^\beta - 2.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{S^+(g_k(z))}{|z|^{n+2s}} dz = c^+(\beta), \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{S^-(g_k(z))}{|z|^{n+2s}} dz = c^-(\beta),$$

Lema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s \in (0,1)$ *y*

$$\xi(x) = \begin{cases} d(x)^\beta & \text{if } x \in \Omega_\delta \\ \ell & \text{if } x \in \Omega \setminus \Omega_\delta \\ 0 & \text{if } x \in \Omega^c \end{cases}$$

Entonce existen $C, \delta > 0$ *tales que*

(a) $\mathcal{M}^+_{\mathcal{K}}(\xi(x)) \geq C d^{\beta-2s}(x)$ if $\beta \in (\beta_1, 2s)$,

(b) $\mathcal{M}^+_{\mathcal{K}}(\xi(x)) \leq -C d^{\beta-2s}(x)$ if $\beta \in (0, \beta_1)$,

(c) $\mathcal{M}^-_{\mathcal{K}}(\xi(x)) \geq C d^{\beta-2s}(x)$ if $\beta \in (\beta_2, 2s)$,

(d) $\mathcal{M}^-_{\mathcal{K}}(\xi(x)) \leq -C d^{\beta-2s}(x)$ if $\beta \in (0, \beta_2)$

para $x \in \Omega_\delta$, *donde* $0 < \beta_1 < \beta_2 < 2s$ *son los dados anteriormente.*

El lema anterior junto con el principio de comparación permite arribar al resultado fundamental para la regularidad hasta el borde

Lema

Sea u solución de (P) con $s \in (\frac{1}{2}, 1)$, entonce existe $\delta > 0$ y $\beta \in (0, \beta_1)$ tal que

$$|u(x)| \leq Cd(x)^{\beta} \quad \forall x \in \Omega_{\delta}$$

para alguna constante $C > 0$.

y así, finalmente,

Lema (Boundary regularity)

Sea u solución de (P) con $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. Entonce existe $\delta > 0$ y $\beta \in (0, \beta_1)$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\beta} \quad \text{for } y \in \partial\Omega, x \in \Omega_{\delta}.$$

La simplicidad del autovalor principal sigue probando la siguiente estimación del tipo ABP

Teorema

Sea f continua y acotada, y $s \in (1/2, 1)$. Sea u solución viscosa de

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{+} u(x) + c^{+}|\nabla u(x)| \geq -f(x) \quad \text{in } B_1,$$

$u \leq 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_1$. Entonces $\sup_{B_1} u \leq C\|f\|_{L^\infty(B_1)}$ con C independiente de s.

Gracias por su atención.