PRINCIPIOS DE COMPARACIÓN PARA SOLUCIONES VISCOSAS EN EL GRUPO DE HEISENBERG

Expositor: Julio Alejo Ruiz
Autores: Pablo Ochoa - Julio Alejo Ruiz

Universidad Nacional de Cuyo - CONICET

22 de septiembre

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una subsolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir

$$-\Delta u \leq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una subsolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir

$$-\Delta u \leq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una subsolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir

$$-\Delta u \leq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$

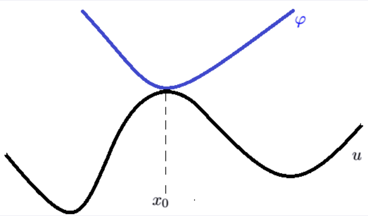


Figura: Función test φ

Noción de solución viscosa

De la concavidad local de $u - \varphi$ tenemos que

$$0 \geq \Delta(u - \varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) \geq -\Delta\varphi(x_0),$$

lo que implica que

$$-\Delta\varphi(x_0) \leq 0.$$

Noción de solución viscosa

De la concavidad local de $u - \varphi$ tenemos que

$$0 \geq \Delta(u - \varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) \geq -\Delta\varphi(x_0),$$

lo que implica que

$$-\Delta\varphi(x_0) \leq 0.$$

Noción de solución viscosa

De la concavidad local de $u - \varphi$ tenemos que

$$0 \geq \Delta(u-\varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) \geq -\Delta\varphi(x_0),$$

lo que implica que

$$-\Delta\varphi(x_0) \leq 0.$$

Noción de solución viscosa

De la concavidad local de $u - \varphi$ tenemos que

$$0 \geq \Delta(u - \varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) \geq -\Delta\varphi(x_0),$$

lo que implica que

$$-\Delta\varphi(x_0) \leq 0.$$

Noción de solución viscosa

De la concavidad local de $u - \varphi$ tenemos que

$$0 \geq \Delta(u - \varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) \geq -\Delta\varphi(x_0),$$

lo que implica que

$$-\Delta\varphi(x_0) \leq 0.$$

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una supersolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir

$$-\Delta u \geq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 \in \Omega$,

entonces

$$-\Delta \varphi(x_0) \geq 0.$$

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una supersolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir
$$-\Delta u \geq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 \in \Omega$,

entonces
$$-\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una supersolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir

$$-\Delta u \geq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 \in \Omega$,

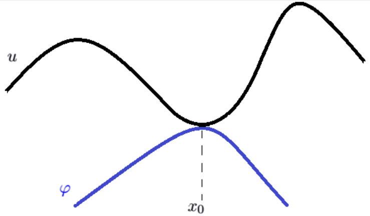


Figura: Función test φ

entonces

$$-\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Noción de solución viscosa

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es una supersolución clásica de la ecuación de Laplace en Ω, es decir

$$-\Delta u \geq 0.$$

Consideremos una función test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en $x_0 \in \Omega$,

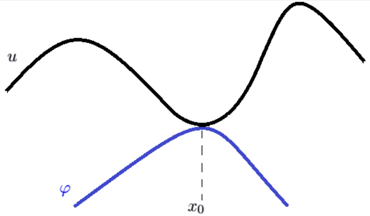


Figura: Función test φ

entonces

$$-\Delta\varphi(x_0) \geq 0.$$

Definición de solución viscosa

Consideremos

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Definición

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, u \in SCS(\Omega)$, *$u$ es una subsolución viscosa de* $F = 0$ *en el punto* x_0 *si para cualquier función test* $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *tal que* $u(x_0) = \varphi(x_0)$ *y que* $u - \varphi$ *tiene un máximo local en* x_0*, entonces*

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0;$$

Definimos supersoluciones de manera análoga y finalmente:

Definición

Decimos que u *es una solución viscosa en el conjunto abierto* Ω *si* u *es subsolución y supersolución viscosa en cualquier punto* $x_0 \in \Omega$.

Definición de solución viscosa

Consideremos

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Definición

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, u \in SCS(\Omega)$, *$u$ es una subsolución viscosa de* $F = 0$ *en el punto* x_0 *si para cualquier función test* $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *tal que* $u(x_0) = \varphi(x_0)$ *y que* $u - \varphi$ *tiene un máximo local en* x_0*, entonces*

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0;$$

Definimos supersoluciones de manera análoga y finalmente:

Definición

Decimos que u *es una solución viscosa en el conjunto abierto* Ω *si* u *es subsolución y supersolución viscosa en cualquier punto* $x_0 \in \Omega$.

Definición de solución viscosa

Consideremos

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Definición

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, u \in SCS(\Omega)$, u *es una subsolución viscosa de* $F = 0$ *en el punto* x_0 *si para cualquier función test* $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *tal que* $u(x_0) = \varphi(x_0)$ *y que* $u - \varphi$ *tiene un máximo local en* x_0*, entonces*

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0;$$

Definimos supersoluciones de manera análoga y finalmente:

Definición

Decimos que u *es una solución viscosa en el conjunto abierto* Ω *si* u *es subsolución y supersolución viscosa en cualquier punto* $x_0 \in \Omega$.

El grupo de Heisenberg con 3 parámetros

Definición

Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

junto con la multiplicación usual de matrices.

$(G, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg con 3 parámetros.*

Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to G$,

$$\phi(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El grupo de Heisenberg con 3 parámetros

Definición

Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

junto con la multiplicación usual de matrices.

$(G, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg con 3 parámetros.*

Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to G$,

$$\phi(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El grupo de Heisenberg con 3 parámetros

Definición

Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

junto con la multiplicación usual de matrices.

$(G, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg con 3 parámetros.*

Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to G$,

$$\phi(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El grupo de Heisenberg con 3 parámetros

Definición

Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

junto con la multiplicación usual de matrices.

$(G, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg con 3 parámetros.*

Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to G$,

$$\phi(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + 2(x'y - xy').$$

El elemento neutro es $(0, 0, 0)$.

El elemento inverso de (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg de primer orden.*.

El grupo de Heisenberg

Definición

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + 2(x'y - xy').$$

El elemento neutro es $(0, 0, 0)$.

El elemento inverso de (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg de primer orden.*.

Definición

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + 2(x'y - xy')).$$

El elemento neutro es $(0, 0, 0)$.

El elemento inverso de (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg de primer orden.*.

Definición

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + 2(x'y - xy')).$$

El elemento neutro es $(0, 0, 0)$.

El elemento inverso de (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg de primer orden.*.

El grupo de Heisenberg

Definición

$$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$$

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + 2(x'y - xy').$$

El elemento neutro es $(0, 0, 0)$.

El elemento inverso de (x, y, z) es $(-x, -y, -z)$.

$\mathcal{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ es llamado *el grupo de Heisenberg de primer orden.*.

Estructura diferenciable

Tomamos como base del espacio tangente en cada punto $p = (x, y, z)$

$$X_1(p) = \partial_x + 2y\partial_z,$$

$$X_2(p) = \partial_y - 2x\partial_z,$$

$$X_3(p) = [X_1, X_2] = -4\partial_z,$$

donde

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1.$$

Definición

$$\mathcal{H}_{0,p} = gen\{X_1(p), X_2(p)\}$$

es el espacio horizontal de vectores tangentes en el punto $p = (x, y, z)$.

Tomamos como base del espacio tangente en cada punto $p = (x, y, z)$

$$X_1(p) = \partial_x + 2y\partial_z,$$

$$X_2(p) = \partial_y - 2x\partial_z,$$

$$X_3(p) = [X_1, X_2] = -4\partial_z,$$

donde

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1.$$

Definición

$$\mathcal{H}_{0,p} = gen\{X_1(p), X_2(p)\}$$

es el espacio horizontal de vectores tangentes en el punto $p = (x, y, z)$.

Estructura diferenciable

Tomamos como base del espacio tangente en cada punto $p = (x, y, z)$

$$X_1(p) = \partial_x + 2y\partial_z,$$

$$X_2(p) = \partial_y - 2x\partial_z,$$

$$X_3(p) = [X_1, X_2] = -4\partial_z,$$

donde

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1.$$

Definición

$$\mathcal{H}_{0,p} = gen\{X_1(p), X_2(p)\}$$

es el espacio horizontal de vectores tangentes en el punto $p = (x, y, z)$.

Cálculo en $\mathcal{H}$

Definición

Dada una función $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *consideramos*

$$Du = (X_1 u, X_2 u, X_3 u) \in \mathbb{R}^3,$$

el gradiente (total) de u.

Definición

El gradiente horizontal de u *es*

$$D_{\mathcal{H}} u = (X_1 u, X_2 u) \in \mathcal{H}_{0,p},$$

Definición

La Hessiana horizontal simetrizada de u *la cual viene dada por*

$$(D^2_{\mathcal{H}} u)^* = \begin{pmatrix} X_1^2 u & \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) \\ \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) & X_2^2 u \end{pmatrix}.$$

Definición

Dada una función $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *consideramos*

$$Du = (X_1 u, X_2 u, X_3 u) \in \mathbb{R}^3,$$

el gradiente (total) de u.

Definición

El gradiente horizontal de u *es*

$$D_{\mathcal{H}} u = (X_1 u, X_2 u) \in \mathcal{H}_{0,p},$$

Definición

La Hessiana horizontal simetrizada de u *la cual viene dada por*

$$(D^2_{\mathcal{H}} u)^* = \begin{pmatrix} X_1^2 u & \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) \\ \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) & X_2^2 u \end{pmatrix}.$$

Definición

Dada una función $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *consideramos*

$$Du = (X_1 u, X_2 u, X_3 u) \in \mathbb{R}^3,$$

el gradiente (total) de u.

Definición

El gradiente horizontal de u *es*

$$D_{\mathcal{H}} u = (X_1 u, X_2 u) \in \mathcal{H}_{0,p},$$

Definición

La Hessiana horizontal simetrizada de u *la cual viene dada por*

$$(D^2_{\mathcal{H}} u)^* = \begin{pmatrix} X_1^2 u & \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) \\ \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) & X_2^2 u \end{pmatrix}.$$

Definición

Dada una función $u : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *consideramos*

$$Du = (X_1 u, X_2 u, X_3 u) \in \mathbb{R}^3,$$

el gradiente (total) de u.

Definición

El gradiente horizontal de u *es*

$$D_{\mathcal{H}} u = (X_1 u, X_2 u) \in \mathcal{H}_{0,p},$$

Definición

La Hessiana horizontal simetrizada de u *la cual viene dada por*

$$(D^2_{\mathcal{H}} u)^* = \begin{pmatrix} X_1^2 u & \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) \\ \frac{1}{2}(X_1 X_2 u + X_2 X_1 u) & X_2^2 u \end{pmatrix}.$$

Topología en $\mathcal{H}$

Distancia Carnot-Carathéodory (distancia CC)

$$d_{CC}(p,q) = \inf\{\|\gamma(t)\| : \gamma(t) \in H_{0,\gamma(t)}, \forall t \in I, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

Métrica $|\cdot|_{\mathcal{H}}$

Definimos un gauge suave en el grupo $\mathcal{H}$ (Heisenberg gauge) por:

$$|p|_{\mathcal{H}} = ((x^2+y^2)^2 + 16z^2)^{1/4}, \text{ para } p = (x,y,z) \in \mathcal{H}.$$

La correspondiente distancia es:

$$d_{\mathcal{H}}(p,q) = |q^{-1} \cdot p|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } p,q \in \mathcal{H}.$$

Observación

La topología inducida por $d_{\mathcal{H}}$ en $\mathcal{H}$ es la misma que la topología usual de $\mathbb{R}^3$.

Distancia Carnot-Carathéodory (distancia CC)

$$d_{CC}(p,q) = \inf\{\|\gamma(t)\| : \gamma(t) \in H_{0,\gamma(t)}, \forall t \in I, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

Métrica $|\cdot|_{\mathcal{H}}$

Definimos un gauge suave en el grupo $\mathcal{H}$ (Heisenberg gauge) por:

$$|p|_{\mathcal{H}} = ((x^2+y^2)^2 + 16z^2)^{1/4}, \text{ para } p = (x,y,z) \in \mathcal{H}.$$

La correspondiente distancia es:

$$d_{\mathcal{H}}(p,q) = |q^{-1} \cdot p|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } p,q \in \mathcal{H}.$$

Observación

La topología inducida por $d_{\mathcal{H}}$ en $\mathcal{H}$ es la misma que la topología usual de $\mathbb{R}^3$.

Topología en $\mathcal{H}$

Distancia Carnot-Carathéodory (distancia CC)

$$d_{CC}(p,q) = \inf\{\|\gamma(t)\| : \gamma(t) \in H_{0,\gamma(t)}, \forall t \in I, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

Métrica $|\cdot|_{\mathcal{H}}$

Definimos un gauge suave en el grupo $\mathcal{H}$ (Heisenberg gauge) por:

$$|p|_{\mathcal{H}} = ((x^2+y^2)^2 + 16z^2)^{1/4}, \text{ para } p = (x,y,z) \in \mathcal{H}.$$

La correspondiente distancia es:

$$d_{\mathcal{H}}(p,q) = |q^{-1} \cdot p|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } p,q \in \mathcal{H}.$$

Observación

La topología inducida por $d_{\mathcal{H}}$ en $\mathcal{H}$ es la misma que la topología usual de $\mathbb{R}^3$.

Topología en $\mathcal{H}$

Distancia Carnot-Carathéodory (distancia CC)

$$d_{CC}(p,q) = \text{ínf}\{\|\gamma(t)\| : \gamma(t) \in H_{0,\gamma(t)}, \forall t \in I, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\},$$

Métrica $|\cdot|_{\mathcal{H}}$

Definimos un gauge suave en el grupo $\mathcal{H}$ (Heisenberg gauge) por:

$$|p|_{\mathcal{H}} = ((x^2+y^2)^2 + 16z^2)^{1/4}, \text{ para } p = (x,y,z) \in \mathcal{H}.$$

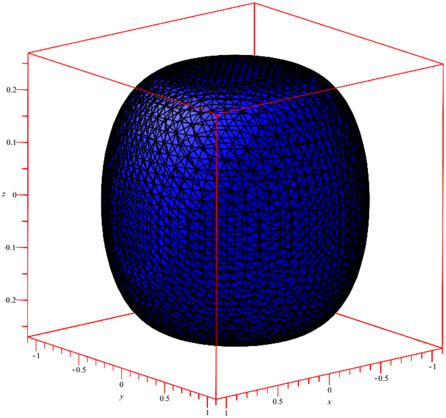
La correspondiente distancia es:

$$d_{\mathcal{H}}(p,q) = |q^{-1} \cdot p|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } p,q \in \mathcal{H}.$$

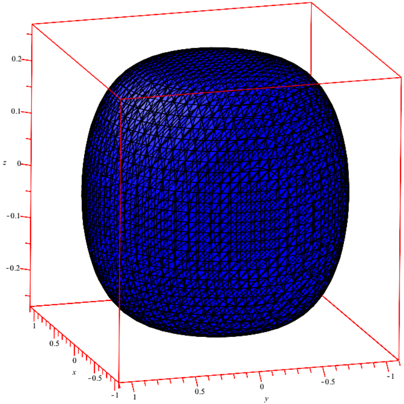
Observación

La topología inducida por $d_{\mathcal{H}}$ en $\mathcal{H}$ es la misma que la topología usual de $\mathbb{R}^3$.

Bolas en $\mathcal{H}$

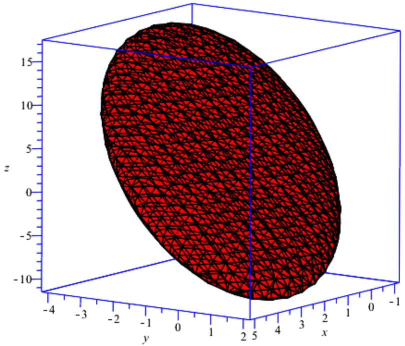


(a)

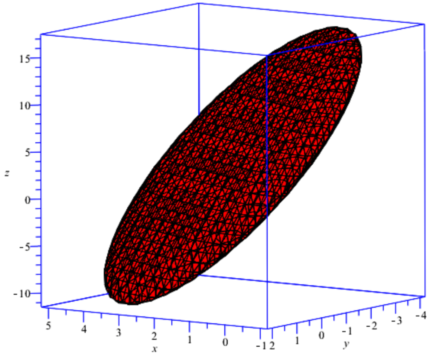


(b)

Figura: Representación de $B_{\mathcal{H}}((0,0,0),1)$



(a)



(b)

Figura: Representación de $B_{\mathcal{H}}((2,-1,3),3)$

Resultado

Teorema (P. O., J. A. R., 2016)

Supongamos que las hipótesis (H1)-(H3) se cumplen. Para cualquier dato $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, existe a lo sumo una solución viscosa $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ del siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p) & \text{si } p \in \Omega \\ u(p) = u_0(p) & \text{para } p \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Resultado

Teorema (P. O., J. A. R., 2016)

Supongamos que las hipótesis (H1)-(H3) se cumplen. Para cualquier dato $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, existe a lo sumo una solución viscosa $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ del siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p) & \text{si } p \in \Omega \\ u(p) = u_0(p) & \text{para } p \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Hipótesis

(H1)

$A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son continuas en $\overline{\Omega}$, y A es simétrica y definida positiva.

(H2)

A es uniformemente elíptica, esto es, existe una constante $\gamma > 0$ tal que:

$$\gamma I \preceq A.$$

(H3)

Para cada $p_0 \in \Omega$, existe un entorno U de p_0, una constante $C > 0$ y $m \geq 4$ tal que:

$$\|b(p) - b(q)\| \leq C\phi(p \cdot q^{-1})^{1/m}, \text{ para todo } p, q \in U.$$

Hipótesis

(H1)

$A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *y* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *son continuas en* $\overline{\Omega}$, *y* A *es simétrica y definida positiva.*

(H2)

A *es uniformemente elíptica, esto es, existe una constante* $\gamma > 0$ *tal que:*

$$\gamma I \preceq A.$$

(H3)

Para cada $p_0 \in \Omega$, *existe un entorno* U *de* p_0, *una constante* $C > 0$ *y* $m \geq 4$ *tal que:*

$$\|b(p) - b(q)\| \leq C\phi(p \cdot q^{-1})^{1/m}, \text{ para todo } p, q \in U.$$

Hipótesis

(H1)

$A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son continuas en $\overline{\Omega}$, y A es simétrica y definida positiva.

(H2)

A es uniformemente elíptica, esto es, existe una constante $\gamma > 0$ tal que:

$$\gamma I \preceq A.$$

(H3)

Para cada $p_0 \in \Omega$, existe un entorno U de p_0, una constante $C > 0$ y $m \geq 4$ tal que:

$$\|b(p) - b(q)\| \leq C\phi(p \cdot q^{-1})^{1/m}, \text{ para todo } p, q \in U.$$

Hipótesis

(H1)

$A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ *y* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *son continuas en* $\overline{\Omega}$, *y* A *es simétrica y definida positiva.*

(H2)

A *es uniformemente elíptica, esto es, existe una constante* $\gamma > 0$ *tal que:*

$$\gamma I \preceq A.$$

(H3)

Para cada $p_0 \in \Omega$, *existe un entorno* U *de* p_0, *una constante* $C > 0$ *y* $m \geq 4$ *tal que:*

$$\|b(p) - b(q)\| \leq C\phi(p \cdot q^{-1})^{1/m}, \text{ para todo } p, q \in U.$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Laplaciano subelíptico.

Sea:

$$\Delta_{\mathcal{H}_0} u(p) = f(p), \quad p \in \Omega,$$

donde:

$$\Delta_{\mathcal{H}_0} u = X_1^2 u + X_2^2 u.$$

Ejemplo 2: ecuaciones lineales en forma de divergencia.

Sea $M : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M \in \mathcal{C}^1$ un campo matricial simétrico y definido positivo. Consideramos la siguiente ecuación en forma de divergencia:

$$-\mathrm{div}_{\mathcal{H}_0}\big(M(p)\nabla_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) = f(p).$$

La cual es equivalente a:

$$-\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p),$$

donde:

$$A(p) = M(p), \quad b(p) = -\mathrm{div}_{\mathcal{H}_0} M(p).$$

Ejemplo 1: Laplaciano subelíptico.

Sea:

$$\Delta_{\mathcal{H}_0} u(p) = f(p), \quad p \in \Omega,$$

donde:

$$\Delta_{\mathcal{H}_0} u = X_1^2 u + X_2^2 u.$$

Ejemplo 2: ecuaciones lineales en forma de divergencia.

Sea $M : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M \in \mathcal{C}^1$ un campo matricial simétrico y definido positivo. Consideramos la siguiente ecuación en forma de divergencia:

$$-\mathrm{div}_{\mathcal{H}_0}\big(M(p)\nabla_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) = f(p).$$

La cual es equivalente a:

$$-\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p),$$

donde:

$$A(p) = M(p), \quad b(p) = -\mathrm{div}_{\mathcal{H}_0} M(p).$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Laplaciano subelíptico.

Sea:

$$\Delta_{\mathcal{H}_0} u(p) = f(p), \quad p \in \Omega,$$

donde:

$$\Delta_{\mathcal{H}_0} u = X_1^2 u + X_2^2 u.$$

Ejemplo 2: ecuaciones lineales en forma de divergencia.

Sea $M : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M \in \mathcal{C}^1$ un campo matricial simétrico y definido positivo. Consideramos la siguiente ecuación en forma de divergencia:

$$-\mathrm{div}_{\mathcal{H}_0}\big(M(p)\nabla_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) = f(p).$$

La cual es equivalente a:

$$-\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p),$$

donde:

$$A(p) = M(p), \quad b(p) = -\mathrm{div}_{\mathcal{H}_0} M(p).$$

Principio de comparación

Principio de comparación (P. O., J. A. R., 2016)

Asumamos (H1), (H2) y (H3). Sea $u \in SCS(\overline{\Omega})$ una subsolución y $v \in SCI(\overline{\Omega})$ una supersolución de

$$\begin{cases} -\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0}u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}}u(p)\rangle = f(p) & \text{si } p \in \Omega \\ u(p) = u_0(p) & \text{para } p \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces:

$$u \leq v \quad \text{in} \ \ \Omega.$$

Principio de comparación

Principio de comparación (P. O., J. A. R., 2016)

Asumamos (H1), (H2) y (H3). Sea $u \in SCS(\overline{\Omega})$ una subsolución y $v \in SCI(\overline{\Omega})$ una supersolución de

$$\begin{cases} -\mathrm{tr}\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0}u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}}u(p)\rangle = f(p) & \text{si } p \in \Omega \\ u(p) = u_0(p) & \text{para } p \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces:

$$u \leq v \quad \text{in } \ \Omega.$$

Existencia a través del Método de Perrón

Teorema

Supongamos que existe una subsolución viscosa $\underline{u} \in SCS(\overline{\Omega})$ *y una supersolución viscosa* $\overline{u} \in SCI(\overline{\Omega})$ *de*

$$(*) \begin{cases} -tr\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p) & \text{si } p \in \Omega \\ u(p) = 0 & \text{para } p \in \partial\Omega, \end{cases}$$

tales que:

$$\underline{u}_* = \overline{u}^* = 0$$

en $\partial\Omega$. *Entonces:*

$$u(x) = \sup\{v(x) : \underline{u} \leq v \leq \overline{u} \text{ en } \Omega \text{ y } v \text{ es una subsolución de } (*)\},$$

definida para todo $x \in \overline{\Omega}$, *es una solución viscosa.*

Teorema

Supongamos que existe una subsolución viscosa $\underline{u} \in SCS(\overline{\Omega})$ *y una supersolución viscosa* $\overline{u} \in SCI(\overline{\Omega})$ *de*

$$(*) \begin{cases} -tr\big(A(p)\nabla^2_{\mathcal{H}_0} u(p)\big) + \langle b(p), \nabla_{\mathcal{H}} u(p)\rangle = f(p) & \text{si } p \in \Omega \\ u(p) = 0 & \text{para } p \in \partial\Omega, \end{cases}$$

tales que:

$$\underline{u}_* = \overline{u}^* = 0$$

en $\partial\Omega$. *Entonces:*

$$u(x) = \sup\{v(x) : \underline{u} \leq v \leq \overline{u} \text{ en } \Omega \text{ y } v \text{ es una subsolución de } (*)\},$$

definida para todo $x \in \overline{\Omega}$, *es una solución viscosa.*

¡Muchas gracias!