Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas como problema inverso de momentos

Maria B. Pintarelli

Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadisticas de la Facultad de Ingenieria (GAMEFI) UNLP
Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - UNLP

UMA 2016

Introduccion

Consideramos ecuaciones en derivadas parciales parabólicas de la forma:

$$w_t - (w_x)_x = r(x, t)$$

donde la función desconocida $w(x, t)$ está definida en $E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. También asumimos que $r(x, t)$ es conocida. Consideramos las condiciones

$$w_x(a_1, t) = k_1(t) \qquad w_x(b_1, t) = k_2(t)$$

$$w(x, a_2) = h_1(t) \qquad w(x, b_2) = h_2(t)$$

Problema de momentos generalizados Hallar $f(x)$ sobre $\Omega \subset R^d$ dados sus momentos

$$\mu_i = \int\limits_{\Omega} g_i(x) f(x) dx \quad i \in N$$

donde:
$(g_i)_{i \in N}$ secuencia de funciones (conocidas) en $L^2(\Omega)$ linealmente independientes
$(\mu_i)_{i \in N}$ son los datos conocidos
Condición necesaria y suficiente de existencia de solución:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} C_{ij} \mu_j \right)^2 < \infty$$

Introduccion

Método para construir una solución:*método de expansión truncada*
Se considera el problema finito:

$$\mu_i = \int_{\Omega} g_i(x) f(x) dx \quad i = 0, 1, 2, ..., n$$

se aproxima $f(x)$ con $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$
ortonormalización de $(g_i)_{i=0}^{n} \longrightarrow (\varphi_i(x))_{i=0}^{n}$
$(\lambda_i)_{i=0}^{n}$ son coeficientes que dependen de $(\mu_i)_{i=0}^{n}$

Transformación a una ecuación integral

Sea $F(w(x,t)) = r(x,t)$ una ecuación en derivadas parciales, con solución $w(x,t)$ y condiciones en el borde $C = \partial E$ de una región $E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$

$$w_x(a_1,t) = k_1(t) \qquad w_x(b_1,t) = k_2(t)$$
$$w(x,a_2) = h_1(t) \qquad w(x,b_2) = h_2(t)$$

Sea $F^* = (F_1(w), F_2(w))$ campo vectorial tal que:

$$w \text{ satisface } div(F^*) = h^*(w) \text{ con } h^* \text{ conocida}$$

y recíprocamente

$$\text{si } w \text{ satisface } div(F^*) = h^*(w) \text{ entonces } F(w(x,t)) = r(x,t)$$

Específicamente en este caso $F(w(x,t)) = w_t - w_{xx}$ y tomamos

$$F^* = (F_1(w), F_2(w)) = (w_x, -w)$$
$$h^*(w) = -r(x,t)$$

Transformación a una ecuación integral

Escribimos

$$w_\xi - (w_\tau)_\tau = r(\tau, \xi)$$

Sea $u(x, t, \tau, \xi)$ función auxiliar

$$u(x, t, \tau, \xi) = e^{-t\xi} cos\left(\frac{x\pi}{b_1}\tau\right)$$

Como

$$udiv(F^*) = uh^*(w)$$

tenemos

$$\iint_E udiv(F^*)dA = \iint_E uh^*(w)dA$$

además

$$udiv(F^*) = div(uF^*) - F^* \cdot \bigtriangledown u$$

y

$$\iint_E udiv(F^*)dA = \underbrace{\iint_E div(uF^*)dA}_{=\int_C (uF^*)\cdot nds} - \iint_E F^* \cdot \bigtriangledown udA$$

obtenemos $\iint_E uh^*(w)dA = \int_C (uF^*)\cdot n ds - \iint_E F^* \cdot \bigtriangledown u dA$
donde $\bigtriangledown u = (u_\tau, u_\xi)$
Consideramos la integral

$$\iint_E F^* \cdot \bigtriangledown u dA = \iint_E F_1 u_\tau + F_2 u_\xi dA$$

Integrando por partes:

$$\iint_E F_1 u_\tau dA = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} F_1 u_\tau d\tau d\xi =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \left(w(b_1,\xi)u_\tau(x,t,b_1,\xi) - w(a_1,\xi)u_\tau(x,t,a_1,\xi)\right) d\xi - \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} w(\tau,\xi)u_{\tau\tau} d\tau d\xi$$

Notar que en (7) si x es un número natural

$$u_\tau(x,t,b_1,\xi) = -e^{-t\xi}\frac{x\pi}{b_1} sin\left(\frac{x\pi}{b_1}b_1\right) = 0$$

y si $a_1 = 0$ entonces

$$u_\tau(x,t,a_1,\xi) = -e^{-t\xi}\frac{x\pi}{b_1} sin\left(\frac{x\pi}{b_1}a_1\right) = 0$$

Transformación a una ecuación integral

Entonces si $x \in N$ y $a_1 = 0$:

$$\iint_E F^* \cdot \bigtriangledown u dA = -\iint_E (w u_{\tau\tau} - w u_\xi) dA = -\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} wu \left(\left(\frac{x\pi}{b_1}\right)^2 + t\right) d\tau d\xi$$

Además si anotamos $C = \partial E = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ entonces

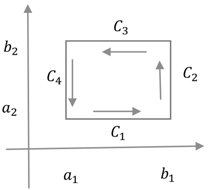


Figura: región E

$$\int_{C_1} (uF^*) \cdot n ds = \int_{a_1}^{b_1} u(x,t,\tau,a_2) \underbrace{w(\tau,a_2)}_{h_1(\tau)} d\tau$$

$$\int_{C_3} (uF^*) \cdot n ds = -\int_{a_1}^{b_1} u(x,t,\tau,b_2) \underbrace{w(\tau,b_2)}_{h_2(\tau)} d\tau$$

$$\int_{C_2} (uF^*) \cdot n ds = \int_{a_2}^{b_2} u(x,t,b_1,\xi) \underbrace{w_\tau(b_1,\xi)}_{k_2(\xi)} d\xi$$

$$\int_{C_4} (uF^*) \cdot n ds = -\int_{a_2}^{b_2} u(x,t,a_1,\xi) \underbrace{w_\tau(a_1,\xi)}_{k_1(\xi)} d\xi$$

Transformación a una ecuación integral

Escribimos

$$G(x,t)=\int_{C_1}(uF^*)\cdot nds+\int_{C_2}(uF^*)\cdot nds+\int_{C_3}(uF^*)\cdot nds+\int_{C_4}(uF^*)\cdot nds$$

$$R(x,t)=\iint_E r(\tau,\xi)u(x,t,\tau,\xi)dA$$

finalmente, si $x\in N$ y $a_1=0$:

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} w(\tau,\xi)u(x,t,\tau,\xi)d\tau d\xi=\frac{G(x,t)-R(x,t)}{\left(\left(\frac{x\pi}{b_1}\right)^2+t\right)}=\varphi(x,t) \tag{1}$$

Si $E=\{(\tau,\xi)\,/\,\tau\geq 0 \quad ; a_2\leq\xi\leq b_2\}$ entonces tomamos

$$u(x,t,\tau,\xi)=e^{-t\xi}cos\,(x\tau)$$

y debe cumplirse $w(\tau,\xi)\to 0$ cuando $\tau\to\infty$

La ecuación (1) es de la forma:

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} w(\tau,\xi)K(x,t,\tau,\xi)d\tau d\xi = \varphi(x,t)$$

Asignamos : $x = i, \quad i = 0, 1, ..., m \quad$ y $\quad t = j, \quad j = 0, 1, ..., n \quad$ y consideramos el siguiente problema de momentos finito bidimensional

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} w(\tau,\xi)K_{ij}(\tau,\xi)d\tau d\xi = \varphi(i,j) = \mu_{ij} \quad i = 0, 1, ..., m \quad j = 0, 1, ..., n$$

Método de expansión truncada: Se considera la base $\{\phi_i(\tau,\xi)\}_{i=0}^{\infty}$ obtenida de $\{K_{ij}(\tau,\xi)\}$ con $i = 0, 1, ..., m \quad j = 0, 1, ..., n$ por el método de Gram-Schmidt
Escribimos $\{K_i(\tau,\xi)\}_{i=0}^{r}$ y $\{\mu_i\}_{i=0}^{r}$ con $r = m.n$

$$w(\tau,\xi) \approx p_r(\tau,\xi) = \sum_{i=0}^{r}\lambda_i\phi_i(\tau,\xi) \quad \lambda_i = \sum_{j=0}^{i} C_{ij}\mu_j \mathrm{i} = 0, 1, ..., r$$

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \left(\sum_{k=j}^{i-1}(-1)\frac{\langle K_i(\tau,\xi) \mid \phi_k(\tau,\xi)\rangle}{\|\phi_k(\tau,\xi)\|^2}C_{kj}\right).\|\phi_i(\tau,\xi)\|^{-1} \quad 1 < i \leq r;\ 1 \leq j < i \\ C_{ii} &= \|\phi_i(\tau,\xi)\|^{-1} \qquad i = 0, 1, ..., r. \end{aligned}$$

Teorema 1

Sea $\{\mu_m\}_{m=0}^{r}$ *un conjunto de números reales* ε *y* E *dos números positivos tales que*

$$\sum_{m=0}^{r}\left|\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}K_m(\tau,\xi)w(\tau,\xi)d\tau d\xi-\mu_m\right|^2\leq\varepsilon^2 \tag{2a}$$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\left[(b_1-a_1)^2w_\tau^2+(b_2-a_2)^2w_\xi^2\right]d\tau d\xi\leq E^2 \tag{2b}$$

entonces

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}|w(\tau,\xi)|^2d\tau d\xi\leq\ \min_m\left\{\left\|CC^T\right\|\varepsilon^2+\frac{E^2}{8\,(m+1)^2};\ m=0,1,...,r\right\}$$

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}|p_r(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|^2d\tau d\xi\leq\left\|CC^T\right\|\varepsilon^2+\frac{E^2}{8\,(r+1)^2}$$

Si $E=(a_1,\infty)\times(a_2,\infty)$, entonces (2b) es reemplazado por

$$\int_{a_2}^{\infty}\int_{a_1}^{\infty}\left[\tau w_\tau^2+\xi w_\xi^2\right]Exp[\tau+\xi]d\tau d\xi\leq E^2$$

y $\tau^m w(\tau,\xi)\to0$ if $\tau\to\infty$ for all $m\in N$ y $\xi^n w(\tau,\xi)\to0$ if $\xi\to\infty$ for all $n\in N$

Ejemplos numéricos

Ejemplo 1 Consideramos la ecuación

$$w_t - w_{xx} = 0$$

en el dominio $E = (0,2) \times (0,2)$ y condiciones de contorno en ∂E :

$$w_x(0,t) = e^{-t} \qquad w_x(2,t) = cos(2)e^{-t}$$

$$w(x,0) = sin(x) \qquad w(x,2) = sin(x)e^{-2}$$

Solución exacta $w(x,t) = sin(x)e^{-t}$
Fueron tomados $r = 9$ momentos
La exactitud es en este caso: $\int_0^2 \int_0^2 |p_9(x,t) - w(x,t)|^2 \, dxdt = 0{,}0361472$

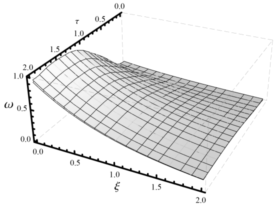


Figura: *Solución aproximada*: gris oscuro, *solución exacta*: gris claro

Ejemplo 2 Consideramos la ecuación

$$w_t - w_{xx} = -4e^{-3t+x}$$

en el dominio $E = (0,1) \times (0,\infty)$ y condiciones de contorno en ∂E

$$w_x(0,t) = e^{-3t} \qquad w_x(1,t) = e^{1-3t} \qquad w(x,0) = e^x$$

Solución exacta $w(x,t) = e^{x-3t}$. Se tomaron $r = 9$ momentos.
Para aplicar Gram Schmidt a $\{K_{ij}(\tau,\xi)\}$ consideramos el producto interno

$$\langle f_i(\tau,\xi), f_j(\tau,\xi)\rangle = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} f_i(\tau,\xi) f_j(\tau,\xi) e^{-\xi} d\xi d\tau$$

La exactitud es, con esta producto interno $\| p_9(x,t) - w(x,t) \|^2 = 0{,}0250523$

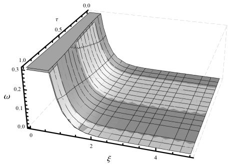


Figura: *Solución aproximada*: gris oscuro, *solución exacta*: gris claro

Problema inverso de Stefan

Problema inverso de Stefan unidimensional en una fase El problema de Stefan consiste en encontrar w y s tal que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad \{(x,t); \quad 0 < x < s(t); \quad t > 0\}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = f(t) \qquad t > 0$$

$$w(s(t),t) = 0 \qquad t > 0$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial w}{\partial x}(s(t),t) \qquad t > 0$$

$$w(x,0) = w_0(x) \qquad x \geq 0$$

$$s(0) = a$$

Se quiere resolver el problema inverso de Stefan: hallar $f(t)$ con $s(t)$ conocida de manera tal que se cumplen las condiciones anteriores.

Escribimos

$$w_\xi - (w_\tau)_\tau = 0$$

Tomamos la función auxiliar

$$u(x,t,\tau,\xi) = e^{-(t+1)\xi} cos\,(x\tau)$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = u_{\tau\tau} = x^2 u \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_\xi = -(t+1)u$$

Consideramos el campo vectorial $F^*(w) = (F_1(w), F_2(w))$ con $F_1(w) = w_\tau \quad F_2(w) = -w$.
Escribimos $E = \{(\tau,\xi);\ 0 < \tau < s(\xi);\ \xi > 0\}$.Usamos:

$$div(uF^*) = udiv(F^*) - F^* \cdot \nabla u$$

si $\cdot$ es el producto escalar y ∇ es el operador gradiente

$$\iint_E udiv(F^*)dA = \iint_E div(uF^*)dA - \iint_E F^* \cdot \nabla u dA$$

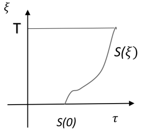
Por el teorema de la divergencia with $C = \partial E$:

$$\iint_E u \, div(F^*) dA = \int_C (uF^*) \cdot n ds - \iint_E F^* \cdot \nabla u dA$$

Calculamos $\iint_E F^* \cdot \nabla u dA$:
Primero escribimos

$$F^* \cdot \nabla u = (F_1, F_2) \cdot (u_\tau, u_\xi) = F_1 u_\tau + F_2 u_\xi$$

$E_T = \{(\tau, \xi);\ 0 < \tau < s(\xi);\ 0 < \xi < T\}$, luego tomamos $T \to \infty$. Anotamos $F_1^p(w) = \int F_1(w) d\tau = w$ entonces



$$\iint_{E_T} F_1 u_\tau dA = \int_0^T \int_0^{s(\xi)} F_1 u_\tau d\tau d\xi =$$

$$= \int_0^T \left[F_1^p(w(s(\xi), \xi)) u_\tau(x, t, s(\xi), \xi) - F_1^p(0, \xi)) u_\tau(x, t, 0, \xi) \right] d\xi -$$

$$\int_0^T \int_0^{s(\xi)} u_{\tau\tau} F_1^p d\tau d\xi$$

$w(s(\xi),\xi)) = 0$ y $u_\tau(x,t,0,\xi) = xsin(x,0)e^{-(t+1)\xi} = 0 \qquad \Longrightarrow$

$$\iint_{E_T} F^* \cdot \nabla u dA = -\int_0^T \int_0^{s(\xi)} \left(u_{\tau\tau} F_1^p(w) - F_2(w)u_\xi\right) d\tau d\xi =$$

$$\int_0^T \int_0^{s(\xi)} uw \left(x^2 + (t+1)\right) d\tau d\xi$$

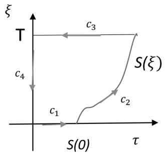
Ahora desarrollamos $\int_C (uF^*) \cdot nds$

$$\int_{c1} (uF^*) \cdot nds = \int_0^{s(0)} u(x,t,\tau,0) w(\tau,0) d\tau = \int_0^{s(0)} u(x,t,\tau,0) w_0(\tau) d\tau$$

$$\int_{c3} (uF^*) \cdot nds = \int_0^{s(T)} u(x,t,\tau,T) w(\tau,T) dx \xrightarrow[T \longrightarrow \infty]{} 0$$

$$\int_{c4} (uF^*) \cdot nds = -\int_0^T u(x,t,0,\xi) w_\tau(0,\xi) d\xi$$

$$\int_{c2} (uF^*) \cdot nds = -\int_0^T u(x,t,s(\xi),\xi) s_\xi(\xi) d\xi$$



Entonces

$$\int_0^\infty \int_0^{s(\xi)} uw(x^2 + (t+1))d\tau d\xi =$$
$$\int_0^{s(0)} cos(x\tau)w(\tau,0)d\tau - \int_0^\infty \quad cos(xs(\xi))e^{-(t+1)\xi}s_\xi(\xi)d\xi -$$
$$\int_0^\infty e^{-(t+1)\xi}w_\tau(0,\xi)d\xi$$

Hacemos $x^2 + t + 1 = 0$

$\int_0^\infty e^{-(t+1)\xi}w_\tau(0,\xi)d\xi =$

$\int_0^{s(0)} cos(\sqrt{-t-1}\tau)w(\tau,0)d\tau - \int_0^\infty cos(\sqrt{-t-1}s(\xi))e^{-(t+1)\xi}s_\xi(\xi)d\xi = \varphi(t)$

Asignamos valores a t: $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^\infty e^{-(t+1)\xi}w_\tau(0,\xi)d\xi = \varphi(t) = \mu_t$$

Aproximación numérica a la solución

Para aproximar $w_\tau(0,\xi)$ se toma una base $\phi_i(\xi)$ $i = 0,1,2,...,n$ de $L^2(0,\infty)$ obtenida de la secuencia $g_i(\xi) = e^{-(i+1)\xi}$ por el método de Gram-Schmidt. Entonces:

$$w_\tau(0,\xi) \approx p_n(\xi) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \phi_i(\xi)$$

donde

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{i} C_{ij}\mu_j \qquad i = 0,1,...,n$$

y

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \left(\sum_{r=j}^{i-1} (-1) \frac{\langle g_i(\xi) \mid \phi_r(\xi) \rangle}{\|\phi_r(\xi)\|^2} C_{rj} \right) . \|\phi_i(\xi)\|^{-1} \;\; 1 < i \leq n;\; 1 \leq j < i \\ C_{ii} &= \|\phi_i(\xi)\|^{-1} \qquad i = 0,1,...,n. \end{aligned}$$

El siguiente teorema es una versión unidimensional del teorema 1.

Teorema 2

Sea $\{\mu_i\}_{i=0}^{n}$ *un conjunto de números reales y sea* ε *y* M *dos números positivos tales que*

$\sum_{i=0}^{n} \left| \int_0^\infty g_i(\xi) x(\xi) d\xi - \mu_i \right|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \int_0^\infty \left[\xi e^{\xi} x_{\xi}^2(\xi) \right] d\xi \leq M^2$

entonces si $\quad \lim_{\xi \to \infty} \xi^r x(\xi) = 0 \ \forall r \in N$

$$\int_0^\infty |x(\xi)|^2 \, d\xi \leq \ \min_n \left\{ \left\| C^T C \right\| \varepsilon^2 + \frac{M^2}{(i+1)}; \ i = 0, 1, ..., n \right\}$$

y

$$\int_0^\infty |x(\xi) - p_n(\xi)|^2 d\xi \leq \left\| C^T C \right\| \varepsilon^2 + \frac{M^2}{(n+1)}$$

donde C *es la matrix triangular con elementos* C_{ij} $(1 < i \ \leq n; \, 1 \leq j < i)$.

Ejemplo numérico

Hallar $w_\tau(0,\xi)$ tal que

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \quad \text{in} \quad \{(\tau,\xi); \quad 0 < \tau < s(\xi); \quad \xi > 0\} \qquad \text{with} \quad s(\xi) = \sqrt{1+\xi}$$

$$w(s(\xi),\xi) = 0 \qquad \xi > 0 \qquad \frac{ds}{d\xi} = -\frac{\partial w}{\partial \tau}(s(\xi),\xi) \qquad \xi > 0$$

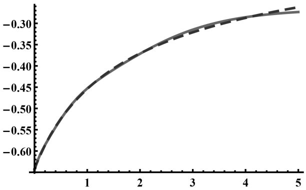
$$w(\tau,0) = w_0(\tau) = 0{,}5e^{0{,}25}\sqrt{\pi}\left[erf(0{,}25) - erf\left(\frac{x}{2}\right)\right] \qquad \tau \geq 0$$

La solución exacta es $w_\tau(0,\xi) = -\frac{e^{0{,}25}}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\xi}}$. Se tomaron $r=6$ momentos

Se aplica Gram Schmidt a $\{g_i(\xi)\}_{i=0}^{n}$ en $L^2(0,\infty)$ se considera el producto intertno

$$\langle f_i(\xi), f_j(\xi)\rangle = \int_0^\infty f_i(\xi) f_j(\xi) e^{-\xi} d\xi$$

Exactitud con este producto interno: $\| \; p_6(\xi) - w_\tau(0,\xi) \; \|^2 = 0{,}00306424$



La ecuación en derivadas parciales parabólica

$$w_\xi - (w_\tau)_\tau = r(\tau,\xi) \quad \text{sobre} \quad E = (0, b_1) \times (a_2, b_2)$$

puede ser escrita como una ecuación integral de Fredholm

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_0^{b_1} w(\tau,\xi)u(x,t,\tau,\xi)d\tau d\xi = \frac{G(x,t) - R(x,t)}{\left(\left(\frac{x\pi}{b_1}\right)^2 + t\right)} = \varphi(x,t) \qquad x\epsilon N$$

Esta ecuación es de la forma:

$$\int_0^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} w(\tau,\xi)K(x,t,\tau,\xi)d\tau d\xi = \varphi(x,t)\ ;\ K(x,t,\tau,\xi) = e^{-t\xi}cos\left(\frac{x\pi}{b_1}\tau\right)\ x\epsilon N$$

Si $w(\tau,\xi) \in L^2(E)$, entonces

$$\int_0^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} w(\tau,\xi)K_{ij}(\tau,\xi)d\tau d\xi = \mu_{ij} \qquad i = 0,1,2,..,j = 0,1,2,...$$

Conclusiones

El problema inverso de Stefan que consiste en hallar $w_\tau(0,\xi)$ siendo $w(\tau,\xi)$ desconocida y tal que se cumplen las siguientes condiciones

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \text{en} \qquad \{(x,t); \qquad 0 < x < s(t); \qquad t > 0\}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = f(t) \quad t > 0 \qquad w(s(t),t) = 0 \quad t > 0$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial w}{\partial x}(s(t),t) \qquad t > 0$$

$$w(x,0) = w_0(x) \quad x \geq 0 \qquad s(0) = a$$

es equivalente a resolver la ecuación integral

$$\int_0^\infty e^{-(t+1)\xi} w_\tau(0,\xi)d\xi =$$

$$\int_0^{s(0)} cos(\sqrt{-t-1}\tau)w(\tau,0)d\tau \quad - \int_0^\infty cos(\sqrt{-t-1}s(\xi))e^{-(t+1)\xi}s_\xi(\xi)d\xi = \varphi(t)$$

la cual es equivalente al problema de momentos generalizado

$$\int_0^\infty e^{-(i+1)\xi} w_\tau(0,\xi)d\xi = \varphi(i) = \mu_i \qquad i = 0,1,2...$$