UMA 2016

Unicidad y estabilidad de soluciones de ecuaciones parabólicas en grupos de Carnot

Pablo D. Ochoa

Universidad Nac. de Cuyo-Univ. Nac. de San Luis-CONICET

Setiembre 22, 2016

Grupos de Carnot

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie finito-dimensional que presenta una estratificación, es decir:

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

donde V_i son subespacios lineales que satisfacen:

- $[V_1, V_j] = V_{j+1}$, para $j = 1, ..., r-1$,
- $[V_1, V_r] = \{0\}$.

Definición: Un grupo de Carnot $\mathbb{G}$ es un grupo de Lie conexo, simplemente conexo, finito-dimensional cuya álgebra de Lie presenta una estratificación.

Distancia de Carnot-Carathéodory: dados $p, q \in \mathbb{G}$, definimos:

$$d(p,q) = \inf \left\{ L(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{G}, \gamma'(t) \in V_{1,\gamma(t)} \; a.e. \right\}$$

Grupos de Carnot como límites de estructuras Riemannianas

- Si $E_1, E_2 \subset Z$, (Z, d_Z) espacio métrico, las distancia Hausdorff entre E_1 y E_2 es:

$$\mathrm{Haus}_Z(E_1, E_2) = \inf\left\{\epsilon > 0 : (E_1)_\epsilon \subset E_2, (E_2)_\epsilon \subset E_1\right\}.$$

- Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. La distancia de Gromov-Hausdorff entre X e Y es:

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_{f,g,Z} \mathrm{Haus}_Z\big(f(X), g(Y)\big).$$

- Una sucesión (X_n, d_n, x_n) converge en el sentido de Gromov-Hausdorff a (X, d, x) si la sucesión de bolas cerradas $B_{X_n}(x_n, r)$ converge con respecto a d_{GH} a $B_X(x, r)$, uniformemente en r.

Grupos de Carnot como límites de estructuras Riemannianas

Sea $(\mathbb{G}, d)$ un grupo de Carnot de dimensión N, cuya álgebra de Lie está equipada con una métrica Riemanniana, invariante por izquierda, tal que $V_i's$ son mutuamente ortogonales. Sea:

$$\{X_1, ..., X_m\}$$

una base ortonormal de V_1, y:

$$\{Y_1, ..., Y_n\}$$

una base ortonormal de $V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$. Para cada $L > 0$, sea g_L una métrica Riemanniana tal que $\{X_1, ..., X_m, \tilde{Y}_1, ..., \tilde{Y}_n\}$ es ortonormal, donde $\tilde{Y}_i = L^{-c(i)} Y_i$.

Teorema: The sequence $(\mathbb{R}^N, d_L)$ Gromov-Hausdorff converge a $(\mathbb{G}, d)$ cuando $L \to \infty$.

Evolución de una superficie por curvatura media

Considere una familia de superficies suaves $M_t \subset \mathbb{G}$. Sea:

$$\Sigma(M_t) = \Big\{ p \in M_t : T_p M_t = V_{1,p} \Big\}.$$

El flujo por curvatura media horizontal de $\{M_t\}_t$ es el flujo $t \to M_t$ en el cual cada punto $x(t) \notin \Sigma(M_t)$ de M_t se mueve en la dirección del vector normal horizontal a M_t en $x(t)$, con velocidad igual a la curvatura media horizontal.
Si $M_t = \{p : u(p,t) = 0\}$, entonces:

$$\partial_t u(t,p) = \sum_{i,j=1}^{m_1} \Big(\delta_{ij} - \frac{X_i u X_j u}{\sum_{i=1}^{m_1} (X_i u)^2} \Big) X_i X_j u,$$

donde $m_1 = dim(V_1)$.

Evolución de una superficie por curvatura media

Consideremos una familia de superficies $M_t \subset \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$, obtenidas por rotación del gráfico de $\phi = \phi(p_N, t)$ alrededor del eje p_N. Entonces:

$$M_t = \Big\{(p_1, ..., p_N) : \Big(\sum_{i=1}^{N-1} p_i^2\Big)^{1/2} = \phi(t, p_N)\Big\}.$$

Sea:

$$u(t, p_1, ..., p_N) = \phi(t, p_N) - \Big(\sum_{i=1}^{N-1} p_i^2\Big)^{1/2},$$

entonces M_t puede considerarse como el conjunto de nivel cero de u.
Observación:

$$u(t, p_1, ..., p_N) = u_0\Big(t, \sum_{i=1}^{N-1} p_i^2, p_N\Big),$$

Contexto general

Se consideran ecuaciones parabólicas:

$$u_t + \mathcal{F}(t, p, u, \nabla_{\mathcal{G},0} u, \nabla_{\mathcal{G},1} u, (\nabla^2_{\mathcal{G},0} u)^*) = 0, \quad (t, p) \in \Omega_T = (0, T) \times \Omega,$$

donde:

$$\nabla_{\mathcal{G},0} u(p) = \sum_{i=1}^{m_1} (X_{i,p} u) X_{i,p}, \qquad \nabla_{\mathcal{G},1} u(p) = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} (X_{i,p} u) X_{i,p},$$

y las entradas de la matriz Hessiana vienen dadas:

$$(\nabla^2_{\mathcal{G}} u^*)_{ij} = \frac{1}{2}\big(X_i X_j u + X_j X_i u\big), \quad i, j = 1, ..., m_1,$$

Hipótesis en el operador $\mathcal{F}$

- $\mathcal{F} : [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^{m_1} \setminus \{0\}\right) \times \mathbb{R}^{m_2} \times S^{m_1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continuo y propio.
- Para cada $\tau > 0$:

$$\mathcal{F}(t, p, r, \tau\eta, \tau\xi, \mathcal{X}) = \mathcal{F}(t, p, r, \eta, \xi, \mathcal{X}).$$

- Para cada compacto $K \subset [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $L_K > 0$:

$$\mathcal{F}(t, p, r, \eta, \xi, \mathcal{Y}) - \mathcal{F}(t, p, r, \eta, \xi, \mathcal{X}) \leq L_K \sigma,$$

para todo $(t, p, r) \in K$, $(\eta, \xi) \in (\mathbb{R}^{m_1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{m_2}$, y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{X} \leq \mathcal{Y} + \sigma I,$$

para alguna $\sigma > 0$.

- $\mathcal{F}^*(t, p, r, 0, \xi, \mathcal{O}) = \mathcal{F}*(t, p, r, 0, \xi, \mathcal{O}) = 0$. También $\mathcal{F}^*$ y $\mathcal{F}*$ son localmente acotados.

Soluciones viscosas

Subjets. Sea u semi-continua superiormente en (t,p).

$$\mathcal{P}^{2,+}u(t,p)=\Big\{(a,\eta,\xi,\mathcal{X})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}\times S^{m_1}(\mathbb{R})\quad\text{such that}$$
$$u(s,q)\le u(t,p)+a(s-t)+\left\langle\eta,(p^{-1}\cdot q)_1\right\rangle+\left\langle\xi,(p^{-1}\cdot q)_2\right\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle\mathcal{X}(p^{-1}\cdot q)_1,(p^{-1}\cdot q)_1\right\rangle+o\big(d_c(p,q)^2+|s-t|\big)\Big\}.$$

Para v semi-continua inferiormente se define

$$\mathcal{P}^{2,-}v(t,p)=-\mathcal{P}^{2,+}(-v)(t,p).$$

Definición: una función semi-continua superiormente $u:[0,T]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ es subsolución viscosa en $(0,T)\times\Omega$ si para todo $(t,p)\in(0,T)\times\Omega$ y todo subjet $(a,\eta,\xi,\mathcal{X})\in\overline{\mathcal{P}}^{2,+}u(t,p)$:

$$a+\mathcal{F}^*(t,p,u(t,p),\eta,\xi,\mathcal{X})\le 0.$$

En forma similar se definen los conceptos de supersolución y solución viscosas.

Principio de Comparación

Teorema (P.O. 2016)

Sean u una subsolución viscosa y v una supersolución viscosa.
Supongamos que u es simétrica con respecto a $\mathcal{S} : z = G(p_1, ..., p_{N-1})$:

$$u(t, p_1, ..., p_N) = u_0(t, G(p_1, ..., p_{N-1}), p_N),$$

y:

$$u \leq v$$

en

$$\partial_P \Omega_T := \left(\{0\} \times \overline{\Omega}\right) \cup \left([0, T) \times \partial\Omega\right).$$

Entonces:

$$u \leq v \text{ in } \Omega_T.$$

Un resultado de estabilidad

Proposición

Supongamos que u_ϵ es subsolución viscosa tal que u_ϵ converge a u uniformemente en conjuntos compactos de Ω_T. Entonces u es subsolución. Un resultado análogo es cierto para supersoluciones.

Bibliografía

- T. Bieske, A sub-Riemannian maximum principle and its application to the p-Laplacian in Carnot groups, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica* **37** (2012) 119-134.
- L. Capogna and G. Citti, Generalized mean curvature flow in Carnot groups, *Comm. in PDE* **34** (2009) 937-956.
- M. Crandall, H. Ishii and P-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. of Amer. Soc.* **27** 1 (1992) 1-67.
- F. Ferrari, Q. Liu and J. Manfredi, On the horizontal mean curvature flow for axisymmetric surfaces in the Heisenberg group, *Communications in Contemporary Mathematics* **16** 3 (2014).