Contraparte probabilística de difusiones fraccionarias diádicas

H. Aimar, I. Gómez, F. Morana*

IMAL

Reunión Anual UMA 2016 - Bahía Blanca

EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

Probabilidad

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

$$\sqrt{n} (\underbrace{g * \cdots * g}_{n}) (\sqrt{n}\, \cdot) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

Probabilidad

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

$$\sqrt{n}(\underbrace{g * \cdots * g}_{n})(\sqrt{n}\,\cdot) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Análisis

$\widehat{}$ Fourier

EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

fraccionario diádico

Probabilidad

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2)$$

$$\sqrt{n}(\underbrace{g * \cdots * g}_{n})(\sqrt{n}\,\cdot) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2)$$

Markov

Análisis

$\widehat{\ }$ Fourier

Haar

Ecuaciones de difusión en contextos generales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = D^s u(x,t) \\ u(x,0) & = u_0(x) \end{cases}$$

Ecuaciones de difusión en contextos generales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = D^s u(x,t) \\ u(x,0) & = u_0(x) \end{cases}$$

Operador de diferenciación fraccionaria, $0 < s < 1$:

$$D^s g(x) = \int \frac{g(x) - g(y)}{d(x,y)^{n+s}} dy$$

Un caso particular resuelto

$(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ $\qquad$ $\mathscr{D}$ intervalos diádicos

$\delta(x,y) = \inf\limits_{\substack{x,y\in I\\ I\in\mathscr{D}}} |I|$ $\quad$ distancia diádica

Un caso particular resuelto

$(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ $\mathscr{D}$ intervalos diádicos

$\delta(x,y) = \inf_{\substack{x,y \in I \\ I \in \mathscr{D}}} |I|$ distancia diádica

Operador de diferenciación fraccionaria diádico $(0 < s < 1)$:

$$D^s g(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^+} \frac{g(x) - g(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy.$$

Un caso particular resuelto

$(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ $\mathscr{D}$ intervalos diádicos

$\delta(x,y) = \inf\limits_{\substack{x,y\in I\\ I\in\mathscr{D}}} |I|$ distancia diádica

Operador de diferenciación fraccionaria diádico $(0 < s < 1)$:

$$D^s g(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^+} \frac{g(x)-g(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy.$$

Problema de difusión:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D^s u, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Solución

Actis - Aimar [2014]

Solución explícita:

$$u(x,t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} \langle u_0, h \rangle h(x)$$

donde $\mathscr{H}$ es el sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^+)$, $j(h)$ es la escala (resolución) de h y $\langle u_0, h \rangle = \int_{\mathbb{R}+} u_0(x) h(x) dx$.

Solución

Actis - Aimar [2014]

Solución explícita:

$$u(x,t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} \langle u_0, h \rangle h(x)$$

donde $\mathscr{H}$ es el sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^+)$, $j(h)$ es la escala (resolución) de h y $\langle u_0, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x)h(x)dx$.

Forma integral:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y;t)u_0(y)dy,$$

Solución

Actis - Aimar [2014]

Solución explícita:

$$u(x,t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} \langle u_0, h \rangle h(x)$$

donde $\mathscr{H}$ es el sistema de Haar en $L^2(\mathbb{R}^+)$, $j(h)$ es la escala (resolución) de h y $\langle u_0, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x) h(x) dx$.

Forma integral:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y;t) u_0(y) dy,$$

Núcleo:

$$K(x,y;t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y), \quad t > 0$$

Núcleos

$$K(x,y;t) = \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \qquad x,y \in \mathbb{R}^+,\ t>0$$

Núcleos

$$\begin{aligned} K(x,y;t) &= \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \qquad x,y\in\mathbb{R}^+,\ t>0 \\ &= \varphi_t\left(\delta(x,y)\right) \end{aligned}$$

Núcleos

$$
\begin{aligned}
K(x,y;t) &= \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \qquad x,y\in\mathbb{R}^+,\ t>0\\
&= \varphi_t\left(\delta(x,y)\right)\\
&= \frac{1}{t^{1/s}}\varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right)
\end{aligned}
$$

Núcleos

$$
\begin{aligned}
K(x,y;t) &= \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \qquad x,y\in\mathbb{R}^+,\ t>0 \\
&= \varphi_t\left(\delta(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{t^{1/s}}\varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right)
\end{aligned}
$$

$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$
\varphi(r) = \frac{1}{r}\left[-e^{-b_s r^{-s}} + \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j} e^{-b_s (2^j r)^{-s}}\right]
$$

Núcleos

$$\begin{aligned} K(x,y;t) &= \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \qquad x,y\in\mathbb{R}^+,\ t>0 \\ &= \varphi_t\left(\delta(x,y)\right) \\ &= \frac{1}{t^{1/s}}\varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right) \end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\left[-e^{-b_s r^{-s}} + \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j} e^{-b_s (2^j r)^{-s}}\right]$$

acotada, decreciente

Núcleos

$$
\begin{aligned}
K(x,y;t) &= \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-t2^{sj(h)}} h(x)h(y) \qquad x,y\in\mathbb{R}^+,\ t>0 \\
&= \varphi_t\left(\delta(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{t^{1/s}}\varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right)
\end{aligned}
$$

$\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$$
\varphi(r) = \frac{1}{r}\left[-e^{-b_s r^{-s}} + \sum_{j\geqslant 1} 2^{-j} e^{-b_s(2^j r)^{-s}}\right]
$$

acotada, decreciente

s – estable $\qquad \varphi(r)r^{1+s} \xrightarrow[r\to+\infty]{} c \qquad c>0$

Núcleos de Markov diádicos

Núcleos de transición diádicos (de tipo Markov): $\mathscr{K}$

$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tales que

- $K = \varphi \circ \delta$
- $\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\, dy = 1$
- $K(x,y) \geqslant K(x,z) \Leftrightarrow \delta(x,y) \leqslant \delta(x,z)$

Núcleos de transición diádicos (de tipo Markov): $\mathscr{K}$

$K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tales que

- $K = \varphi \circ \delta$
- $\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\,dy = 1$
- $K(x,y) \geqslant K(x,z) \Leftrightarrow \delta(x,y) \leqslant \delta(x,z)$

Perfiles: $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

- $\varphi \geqslant 0$
- $\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j-1}\varphi(2^j) = 1$
- φ monótona no decreciente

Iteración

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, $\qquad f$ densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, $\qquad f$ densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y,x)\,dy$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, $\qquad f$ densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f \, dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y,x)\,dy$$

$$T^2 f(x) = \int Tf(z)K(z,x)\,dz$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, f densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y,x)\,dy$$

$$T^2 f(x) = \int Tf(z)K(z,x)\,dz$$

$$= \iint f(y)K(y,z)\,dy\,K(z,x)\,dz$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, f densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

$$
\begin{aligned}
Tf(x) &= \int f(y)K(y,x)\,dy \\
T^2 f(x) &= \int Tf(z)K(z,x)\,dz \\
&= \iint f(y)K(y,z)\,dy\,K(z,x)\,dz \\
&= \int f(y)\left(\int K(y,z)K(z,x)\,dz\right)dy
\end{aligned}
$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, $\qquad f$ densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

$$
\begin{aligned}
Tf(x) &= \int f(y)K(y,x)\,dy \\
T^2f(x) &= \int Tf(z)K(z,x)\,dz \\
&= \iint f(y)K(y,z)\,dy\,K(z,x)\,dz \\
&= \int f(y)\left(\int K(y,z)K(z,x)\,dz\right)dy \\
&= \int f(y)K^{(2)}(y,x)\,dy
\end{aligned}
$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, $\qquad f$ densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\, dx = 1$

$$
\begin{aligned}
Tf(x) &= \int f(y)K(y,x)\,dy \\
T^2 f(x) &= \int Tf(z)K(z,x)\,dz \\
&= \iint f(y)K(y,z)\,dy\,K(z,x)\,dz \\
&= \int f(y)\left(\int K(y,z)K(z,x)\,dz\right)dy \\
&= \int f(y)K^{(2)}(y,x)\,dy \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, f densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\, dx = 1$

$$T f(x) = \int f(y) K(y,x)\, dy$$
$$T^n f(x) = \int f(y) K^{(n)}(y,x)\, dy$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, f densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y,x)\,dy$$

$$T^n f(x) = \int f(y)K^{(n)}(y,x)\,dy$$

$$K^{(n)}(x,y) = \int_{u_{n-1}} \cdots \int_{u_1} K(x,u_1)K(u_1,u_2)\ldots K(u_{n-1},y)\,du_1\ldots du_{n-1}$$

Iteración

$K \in \mathscr{K}$, $\qquad f$ densidad inicial: $f \geqslant 0$, $\int f\,dx = 1$

$$Tf(x) = \int f(y)K(y,x)\,dy$$

$$T^n f(x) = \int f(y)K^{(n)}(y,x)\,dy$$

$$K^{(n)}(x,y) = \int\limits_{u_{n-1}} \cdots \int\limits_{u_1} K(x,u_1)K(u_1,u_2)\ldots K(u_{n-1},y)\;du_1\ldots du_{n-1}$$

$$K \in \mathscr{K} \Rightarrow K^{(n)} \in \mathscr{K}$$

Escalamiento

Molificación:

$$K_n(x,y) = n\varphi(n\delta(x,y))$$

Escalamiento

Molificación:

$$K_n(x,y) = n\varphi(n\delta(x,y))$$

Obs: $\quad n = 2^j \quad \Rightarrow \quad 2^j\varphi(2^j\delta(x,y)) = 2^j\varphi(\delta(2^j x, 2^j y))$

Escalamiento

Molificación:

$$K_n(x,y) = n\varphi(n\delta(x,y))$$

Obs: $\quad n = 2^j \quad \Rightarrow \quad 2^j\varphi(2^j\delta(x,y)) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy))$

Factor adecuado de molificación: 2^j

$$K_{2^j}(x,y) = 2^jK(2^jx, 2^jy)$$

Escalamiento

Molificación:

$$K_n(x,y) = n\varphi(n\delta(x,y))$$

Obs: $\quad n = 2^j \quad \Rightarrow \quad 2^j\varphi(2^j\delta(x,y)) = 2^j\varphi(\delta(2^jx, 2^jy))$

Factor adecuado de molificación: 2^j

$$K_{2^j}(x,y) = 2^jK(2^jx, 2^jy)$$

$$K \in \mathscr{K} \Rightarrow K_{2^j} \in \mathscr{K}$$

$K \in \mathscr{K}$

Proceso P(K): $\quad K \longmapsto K_{2^j}^{(2^j)}$

f densidad inicial: $f \geqslant 0, \int f\,dx = 1$

$$T_j f(x) := \int_{\mathbb{R}^+} K_{2^j}^{(2^j)}(x,y) f(y)\,dy$$

Análisis espectral

Teorema

Sea $K \in \mathscr{K}$ *y* T *el operador asociado. Entonces*

$$Th = \lambda(h)h = \lambda(j(h))h, \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

Obs: Los autovalores $\lambda(\mathscr{H})$ determinan unívocamente al núcleo $K \in \mathscr{K}$.

Teorema

Sea $K \in \mathscr{K}$ y T el operador asociado. Entonces

$$Th = \lambda(h)h = \lambda(j(h))h, \quad \forall h \in \mathscr{H}.$$

<u>Obs:</u> Los autovalores $\lambda(\mathscr{H})$ determinan unívocamente al núcleo $K \in \mathscr{K}$.

Lema

$$T_j h = \lambda_j^{2^j}(h)h = \lambda(j(h) - j)^{2^j} h$$

Resultado

Teorema de Límite Central (s=1)

Sea $K = \varphi \circ \delta$ un núcleo de $\mathscr{K}$.
Si φ es 1-estable con índice de estabilidad $\sigma > 0$, es decir,

$$\lim_{j \to \infty} (2^j)^2 \varphi(2^j) = \sigma,$$

entonces el proceso $P(K)$ tiene como límite al operador integral T_∞ de autovalores

$$\lambda(\mathscr{H}) = e^{-\sigma |I(\mathscr{H})|^{-1}} = e^{-\sigma 2^{j(\mathscr{H})}}$$

cuyo núcleo está dado por

$$K_\infty(x, y; \sigma) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-\sigma 2^{j(h)}} h(x) h(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Convergencia

$\mathscr{H}$ caracteriza a $L^p(\mathbb{R}^+), 1 < p < \infty$,

$$\|Tf\|_p \simeq \left\| \left(\sum_{h \in \mathscr{H}} \lambda^2(h) |\langle f, h \rangle|^2 |I(h)|^{-1} \chi_{I(h)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

Entonces, la convergencia del espectro implica la convergencia en L^p cuando el dato inicial está en L^p.

Teorema

En las condiciones anteriores, si $f \in L^p$, con $1 < p < \infty$, entonces

$$T_j f \longrightarrow T_\infty f \quad \text{en } L^p.$$

Lema de Alternativas

Sean $K \in \mathscr{K}$ y $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso $P(K)$.
Si el espectro de $\{T_j\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j^{2^j}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathscr{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (dispersión)
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau |I(h)|^{-1}}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathscr{H}$.
(Leyes Centrales)

Lema de Alternativas

Sean $K \in \mathscr{K}$ y $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso $P(K)$.
Si el espectro de $\{T_j\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j^{2^j}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathscr{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (dispersión)
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau |I(h)|^{-1}}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathscr{H}$. (Leyes Centrales)

Lema de Alternativas

Sean $K \in \mathscr{K}$ y $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso $P(K)$.
Si el espectro de $\{T_j\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j^{2^j}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathscr{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (dispersión)
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau |I(h)|^{-1}}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathscr{H}$.

   (Leyes Centrales)

Lema de Alternativas

Sean $K \in \mathscr{K}$ y $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de operadores integrales generados por el proceso $P(K)$.
Si el espectro de $\{T_j\}$ converge puntualmente respecto al sistema de Haar, i.e.

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j^{2^j}(h) = \lambda_\infty(h) \quad \forall h \in \mathscr{H}$$

entonces ocurre una de las siguientes alternativas:

1. $\lambda_\infty(h) = 1 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (LGN)
2. $\lambda_\infty(h) = 0 \quad \forall h \in \mathscr{H},$ (dispersión)
3. $\lambda_\infty(h) = e^{-\tau |I(h)|^{-1}}$ para algún $\tau > 0$, $\forall h \in \mathscr{H}$. (Leyes Centrales)

Proceso $P_{1/2}$

$K \in \mathscr{K}$

Proceso $P_{1/2}(K)$: $\quad K \longmapsto K^{(2^j)}_{2^{2j}}$

f densidad inicial

$$T_j f(x) := \int_{\mathbb{R}^+} K^{(2^j)}_{2^{2j}}(x,y) f(y)\, dy$$

Teorema del Límite Central ($s = 1/2$)

Sea $K = \varphi \circ \delta$ un núcleo de $\mathscr{K}$.
Si φ es $\frac{1}{2}$-estable con índice de estabilidad $\sigma > 0$, es decir,

$$\lim_{j\to\infty} (2^j)^{1+1/2} \varphi(2^j) = \sigma,$$

entonces el proceso $P_{1/2}(K)$ tiene como límite al operador integral T_∞ de autovalores

$$\lambda(\mathscr{H}) = e^{-\sigma |I(\mathscr{H})|^{-1/2}} = e^{-\sigma 2^{j(\mathscr{H})/2}}.$$

Su núcleo

$$K_\infty(x, y; \sigma) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-\sigma 2^{j(h)/2}} h(x) h(y)$$

es el que determina la solución de la ecuación de difusión fraccionaria diádica para $s = 1/2$, cuando σ se mueve en los reales positivos.