

Análisis de la resonancia 1:2 en sistemas con retardos usando el Método de Hopf Gráfico

Griselda Itovich¹, Franco Gentile^{2,3} y Jorge Moiola^{2,4}

¹Sede Alto Valle, Universidad Nacional de Río Negro, Argentina, ²Instituto de Invest. en Ing. Eléctrica "Alfredo Desages" (UNS-CONICET), ³Dpto. de Matemática y ⁴Dpto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur, Argentina.

LXV Reunión Anual de la UMA



Análisis de la resonancia 1:2 en sistemas con retardos usando el Método de Hopf Gráfico

- Descripción de la singularidad en sistemas con retardos
- Metodología en el dominio frecuencia - Teorema de Hopf Gráfico
- Análisis de estabilidad de ciclos
- Ejemplo
- Conclusiones
- Bibliografía

Bifurcación de Hopf y Resonancia 1:2

$\dot{x} = f(x, x_\tau, \mu)$, donde $x_\tau = x(t - \tau)$, $x \in R^n$, $x = 0$ equilibrio

$$P(r, \tau, \mu) = \det(rI_n - A I_n - B e^{-r\tau}) = 0, A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial x_\tau} \right|_{x=0}.$$

- Bifurcación de Hopf (BH):

- 1 Raíces: $\pm i\omega_0$ ($P(\pm i\omega_0) = 0, P'(\pm i\omega_0) \neq 0$) + otras hipótesis de existencia para BH.
- 2 Rama de soluciones periódicas de frecuencia $\omega \approx \omega_0$.

- Resonancia 1:2 (Degeneración de Hopf)

- 1 Dos pares de raíces: $\pm i\omega_0, \pm i2\omega_0$ + otras hipótesis de no degeneración de BH.
- 2 Dos ramas de soluciones periódicas con frecuencias $\omega \approx \omega_0$ y $\bar{\omega} \approx 2\omega_0$.
- 3 Asociada con la aparición de bifurcaciones de ciclos de doble periodo.
- 4 Otros fenómenos dinámicos.

- $\dot{x} = f(x, x_\tau, \mu) \iff \begin{cases} \dot{x} = A_0(\mu)x(t) + A_1(\mu)x_\tau(t) + B(\mu)u, \\ y = -C(\mu)x(t), \\ u = g(y_\tau; \mu), \end{cases}$
- $-\tilde{y} = \mathbf{G}(0; \mu, \tau)g(\tilde{y}; \mu),$
 $\mathbf{G}(s; \mu, \tau) = C[sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau}]^{-1}B$
- $\mathbf{J}(\mu) = D_1 g(y_\tau; \mu)|_{y=\tilde{y}} = \left[\frac{\partial g}{\partial y_\tau} \Big|_{y=\tilde{y}} \right],$
 $h = \det(\lambda I - \mathbf{G}\mathbf{J}e^{-i\omega\tau}) = 0$
- C. Necesaria Hopf: $\begin{cases} F_1 = \operatorname{Re}[h(-1, i\omega, \mu, \tau)] = 0, \\ F_2 = \operatorname{Im}[h(-1, i\omega, \mu, \tau)] = 0. \end{cases}$

Teorema de Hopf Gráfico (THG)

Teorema (THG)

Sean $h = \det(\lambda I - \mathbf{G}\mathbf{J}\mathbf{e}^{-i\omega\tau})$, $F_1 = \operatorname{Re}\{h(-1, i\omega, \mu, \tau)\}$ y $F_2 = \operatorname{Im}\{h(-1, i\omega, \mu, \tau)\}$. Se cumplen:

H1. Existe $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(s, \mu, \tau) : h(\hat{\lambda}, s; \mu, \tau) = 0$, $\hat{\lambda}(i\omega_0, \mu_0, \tau_0) = -1$,

H2. $M = \left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\omega, \mu)} \right|_{(\omega_0, \mu_0)} \neq 0$,

H3. $\sigma_{1d} = -\operatorname{Re} \left(\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{e}^{-i\omega\tau} \mathbf{p}_1}{\mathbf{w}^T \frac{d}{ds} [\mathbf{G} \mathbf{J} \mathbf{e}^{-i\omega\tau}] \mathbf{v}} \right) \Big|_{(i\omega_0, \mu_0, \tau_0)} \neq 0$.

Entonces existe una rama de soluciones periódicas que nace en $\mu = \mu_0$, con frecuencia crítica ω_0 que se caracteriza a partir de M y σ_{1d} .

Consecuencias del Teorema de Hopf Gráfico (THG)

- Es de carácter local.
- Se pueden estimar la amplitud θ y frecuencia ω de las órbitas emergentes mediante la intersección de dos lugares geométricos.
- Se consigue una expresión cuasianalítica básica aproximada para el ciclo empleando armónicos hasta el segundo orden (Mees y Chua, 1979) o bien mejorada de cuarto, sexto u octavo orden (Moiola y Chen, 1996).
- Esta formulación permite analizar mediante σ_{1d} la estabilidad del ciclo que nace en la Bifurcación de Hopf (BH).
- Las aproximaciones de las órbitas permiten detectar cambios de estabilidad y bifurcaciones de ciclos cercanas a la BH.

- Estabilidad del ciclo emergente en un punto de bifurcación de Hopf.
 - ① Dominio tiempo/Dominio frecuencia: coeficiente de estabilidad.
- Estabilidad a lo largo de una rama de ciclos.
 - ① Sea γ una solución T -periódica. Operador de monodromía de $\gamma : M$.
 - ② Autovalores de M : $\{\mu_i\}$: Multiplicadores de Floquet de γ .
Multiplicador trivial: $\mu_0 = 1$.
- γ es estable si $|\mu_i| < 1, \forall i > 1$.
- Bifurcaciones de γ : $\begin{cases} \text{Silla-nodo (fold),} \\ \text{Doble periodo (flip)} \\ \text{Neimark-Sacker (toroidal)} \end{cases}$
- *Software* para análisis de bifurcación de SCRs: Dde-Biftool (Engelborghs *et al.*, 2001).

Ejemplo Campbell y LeBlanc (1998)

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \frac{5}{2}z = f(z(t - \tau))$$

$$(x_2 = z)$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 - \frac{5}{2}x_2 + f(x_2(t - \tau)), \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$

Equilibrios

$$\exists z^* : \frac{5}{2}z^* = f(z^*)$$



$$(x_1^*, x_2^*) = (0, z^*)$$

Formulación en frecuencia

$$\dot{x} = A_0 x + Bu,$$

$$u = g(y_\tau), \quad \text{Entrada}$$

$$y = -Cx, \quad \text{Salida}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\frac{5}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$u = g(y_\tau) = f(-y_\tau).$$

Obs: $y = -x_2$

Sistema de Campbell y LeBlanc

Otra representación mediante sistemas realimentados

Parte lineal

$$G = C(sI - A_0)^{-1}B = \frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta = s^2 + \alpha s + \frac{5}{2}$$

$$G^* = e^{-s\tau}G$$

Realimentación no lineal

$$g(y) = f(-y)$$

$$\text{Eq: } \tilde{y} = -z^*,$$

$$J = -f'(z^*) = -f_1$$

Ganancia

$$\lambda = G^*J = -\frac{f_1 e^{-s\tau}}{\Delta}$$

Condiciones de BH

$$\begin{cases} F_1 = f_1 \cos(\omega\tau) - \frac{5}{2} + \omega^2 = 0, \\ F_2 = f_1 \sin(\omega\tau) + \alpha\omega = 0. \end{cases}$$

Resonancia 1:2

$$P_k = (f_1, \tau, \alpha) = \left(-\frac{3}{2}, k\pi, 0\right),$$

$$k \in N, k \text{ impar}, \omega = 1, 2.$$

Curvas de Hopf

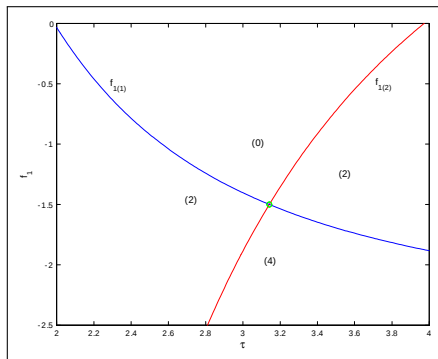
$$(\alpha = 0)$$

$$f_{1(k)} = (-1)^{k+1} \left(\frac{k^2 \pi^2}{\tau^2} - \frac{5}{2} \right)$$

Sistema de Campbell y Leblanc: Un caso particular

Una Resonancia 1:2

Curvas de Hopf

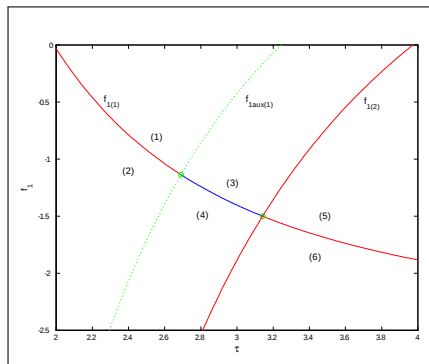


Resonancia 1:2

- $P_1 = (\pi, -\frac{3}{2}, 0)$ ($\alpha = 0$)
- $f(z) = f_1 z + 0.9z^2$
- Estabilidad de ciclos cercanos:
 - # $\sigma_{1d} < 0 \iff$ ESTABLE
 - # $\sigma_{1d} > 0 \iff$ INESTABLE
 - # $\sigma_{1d} = 0 \iff$ Deg. de Hopf
 - # $\sigma_{1d} = 0 \iff$ Bifurcaciones de ciclos

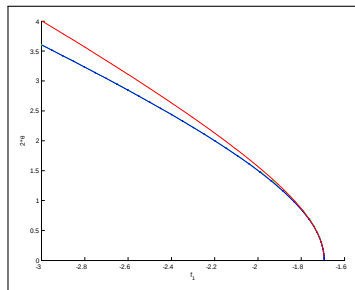
Sistema de Campbell y Leblanc: Un caso particular

Existencia y estabilidad de ciclos asociados a la frecuencia $\omega=1$



$$\tau = 3.5$$

Región (6) ($\omega \approx 1$)



Rojo - Estable, Azul - Inestable

Método frecuencia

Regiones	Hay ciclos con $\omega \approx 1$?
(1),(4),(5)	No
(2),(3),(6)	Si

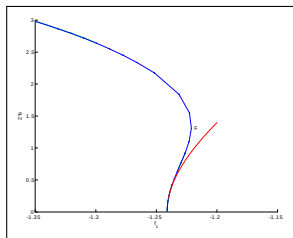
Rojo - Método frecuencia

Azul - Dde-Biftool

Sistema de Campbell y Leblanc: Bifurcaciones de Ciclos

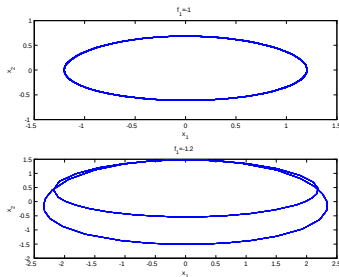
Bifurcaciones Fold y Flip (o de doble periodo)

Fold de ciclos para $\tau = 2.8$
Región (3) ($\omega \approx 1$)



Rojo - Método frecuencia
Azul - Dde-Biftool

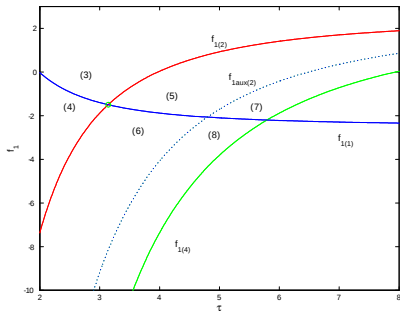
Flip de ciclos para $\tau = 3.4$
Región (5) ($\omega \approx 2$)
 $f_1 = -1$



$f_1 = -1.2$

Sistema de Campbell y Leblanc

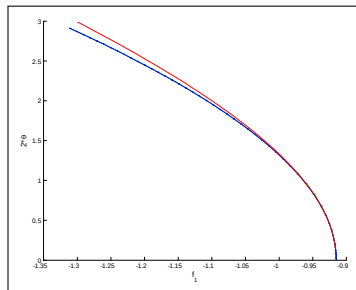
Ciclos asociados a la frecuencia $\omega=2$



Método frecuencia

Regiones	Hay ciclos con $\omega \approx 2$?
(3),(4),(7),(8)	No
(5),(6)	Si

$\tau = 3.4$
Región (5) ($\omega \approx 2$)



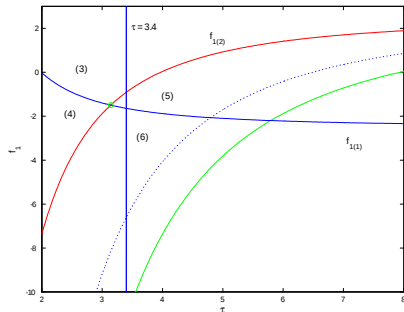
Rojo - Método frecuencia

Azul - Dde-Biftool

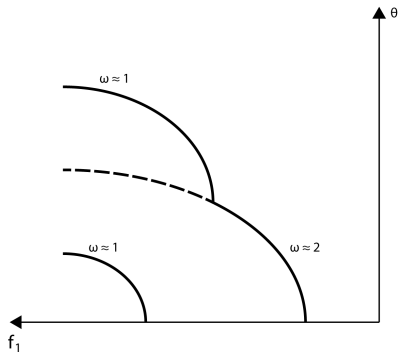
Sistema de Campbell y Leblanc

Una síntesis (muy parcial) de la dinámica hallada

Curvas de Hopf



Regiones (5) y (6), $\tau = 3.4$



- Se ha empleado la metodología en frecuencia para analizar la dinámica en el entorno de una resonancia 1:2.
- Los resultados de la metodología siguen de su formulación básica de segundo orden.
- Se observan limitaciones típicas para la detección de ciclos de amplitud cercana o mayor que 1.
- Según resultados numéricos obtenidos con Dde-Biftool algunas bifurcaciones de ciclos ocurren alejadas del punto de Hopf o para valores de amplitud que exceden las capacidades de la metodología en el dominio frecuencia.
- Se podría explorar en el futuro si mejoran algunos resultados usando una formulación de mayor orden.
- Para conseguir una descripción completa de la dinámica en el entorno de esta singularidad compleja, será necesario complementar la metodología en frecuencia con otras técnicas analíticas.

Campbell, S. A. y LeBlanc, V. G. (1998) Resonant Hopf-Hopf interactions in delay differential equations, J. of Dyn. and Diff. Eq. 10(2), 327-346.

Engelborghs, K., Luzyanina, T. y Roose, D. (2002). Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. ACM Transactions on Mathematical Software 28(1), pp. 1-21.

LeBlanc, V. G. y Langford, W. (1996) Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcation, Arch. Ration. Mech. Anal. 136, 305-357.

Mees, A.I. y Chua, L. (1979) The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 26(4), 235-254.

Moiola, J. L. y Chen, G. (1996) Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach, World Scientific, Singapur.

¡Muchas gracias!